Complexe getallen in context

voor wiskunde D (5 VWO)

R.A.C. Dames
H. van Gendt

Versie 1, november 2006

Deze module is ontwikkeld in opdracht van cTWO.

Inhoud

Inleiding

Waarom complexe getallen?
In klas 3 heb je kennis gemaakt met de tweedegraads vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Je hebt geleerd dat je deze vergelijking kunt oplossen met de abc-formule:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Als het getal onder de wortel (de discriminant) negatief is, heeft deze vergelijking binnen de reële getallen geen oplossing. Je kunt dit ook zien aan de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$. Deze heeft geen snijpunten met de x-as.
Bij allerlei technische problemen, zoals bijvoorbeeld bij een trillend voorwerp, komen tweedegraads vergelijkingen voor met een negatieve discriminant. Uit de natuurkunde is bekend hoe de beweging beschreven kan worden, maar wiskundig loop je vast op de wortel uit een negatief getal. Al in de zestiende eeuw liep men bij het zoeken naar een soort *abc*-formule voor derdegraads vergelijkingen vast op negatieve wortels. In 1572 publiceerde Bombelli een theorie over imaginaire getallen. Met behulp van deze getallen kun je wel met wortels uit negatieve getallen rekenen. De wiskundige Euler bedacht de notatie i voor de wortel uit -1. Met behulp van dit getal kun je een hele verzameling van twee-dimensionale getallen construeren, de complexe getallen, waarmee het mogelijk is om allerlei natuurkundige problemen wiskundig op te lossen. Het aantal wiskundige toepassingen van complexe getallen is zeer groot. Enkele daarvan zullen in deze module aan de orde komen.

Onderzoeksvragen
In deze module leer je van alles over complexe getallen. Als uitgangspunt dienen een aantal wiskundige en natuurkundige problemen die je met complexe getallen kunt oplossen. In overleg met je leraar kun je afspreken hoeveel en welke van deze problemen je wilt gaan oplossen.

1 Homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijkingen oplossen.
Dit onderwerp gaat over vergelijkingen van de vorm:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Zoek uit wat de betekenis is van zo'n type vergelijking en hoe je zo'n vergelijking moet oplossen.
Je zult merken dat sommige oplossingen gebruik maken van complexe getallen. Omdat dit soort vergelijkingen in de natuurkunde een belangrijke rol speelt en daarom uiteindelijk altijd *reële* oplossingen heeft (de natuur is reëel) is de uitdaging om een slimme truc te verzinnen waarmee je ook weer van die complexe getallen af kunt komen.
(Leuk onderwerp als je meer geïnteresseerd bent in wiskundige toepassingen. Zie hoofdstuk 3)

2 Formules bewijzen.

Een centrale formule bij het werken met complexe getallen is de formule van Euler:

$$\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi = e^{\varphi \mathrm{i}}$$

Zoek een bewijs voor deze formule en ga na hoe je met behulp van deze formule sin *x* en cos *x* kunt schrijven als een combinatie van complexe e-machten.

Een belangrijke stelling is de stelling van De Moivre

$$(\cos \varphi + \mathrm{i} \cdot \sin \varphi)^n = \cos (n\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n\varphi)$$

Zoek een bewijs voor deze stelling.
(Geschikt onderwerp als je wilt weten of je de wat abstractere, formele wiskunde leuk vindt en aankan. In hoofdstuk 4 komen de bewijzen van deze en andere formules aan de orde)

3 Massaveersystemen

Bij het ontwerpen van producten moet vaak rekening gehouden worden met trillingen. Een eenvoudig trillend systeem bestaat uit een massa *m* en een veer met constante *C* die gedempt wordt met dempingfactor *d*. Het gedrag van dit systeem kan wiskundig worden beschreven met de differentiaalvergelijking:

$$m \cdot u'' + d \cdot u' + C \cdot u = 0$$

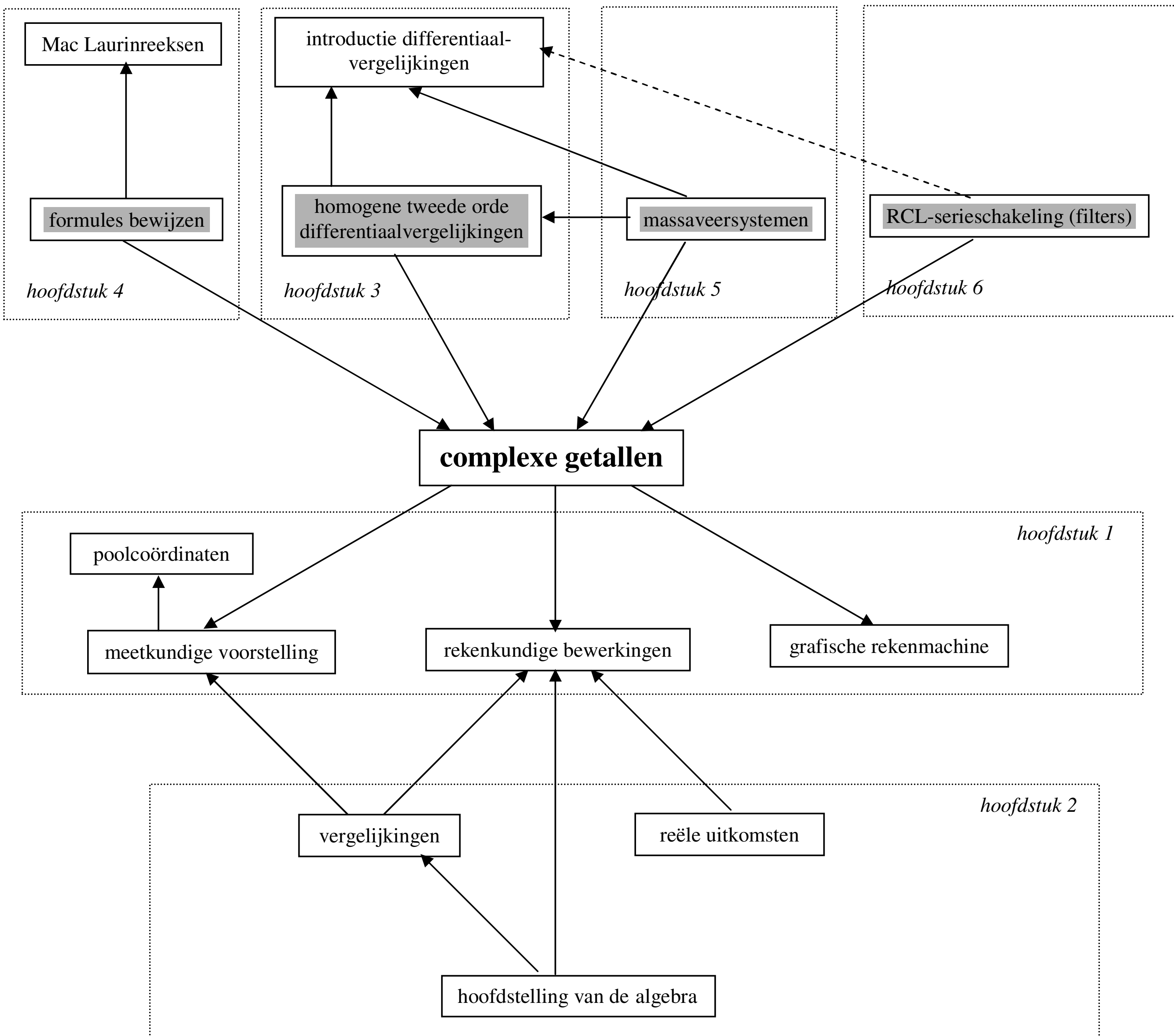
Zoek uit waar deze vergelijking vandaan komt, wat de oplossing van deze vergelijking is en hoe je hiermee de formule in BINAS voor de trillingstijd van een (ongedempt) massaveersysteem kunt afleiden.
(Leuk onderwerp als je wiskunde en natuurkunde wilt combineren. Zie hoofdstuk 5).

4 RCL-serieschakeling

Met een weerstand, een spoel en een condensator kun je een elektrische schakeling bouwen die, aangesloten op wisselspanning met variabele frequentie (toongenerator) over een aantal bijzondere eigenschappen beschikt. Zo fungeert deze schakeling als een filter, dat slechts bepaalde wisselstroomfrequenties doorlaat en andere niet.
Zoek uit hoe je met behulp van complexe getallen het gedrag van deze schakeling kunt doorrekenen. Als daar op school mogelijkheden voor zijn, kun je zelf een proefopstelling bouwen (bijvoorbeeld in combinatie met IP-Coach) en de theorie toepassen in de praktijk.
(Leuk onderwerp als je wiskunde en natuurkunde wilt combineren. Geen voorkennis van andere hierboven genoemde problemen nodig, wel is enige voorkennis van elektriciteit handig. Zie hoofdstuk 6)

Als je nog geen keuze kunt maken is dat geen probleem. Je kunt gewoon beginnen met hoofdstuk 1. Daarin wordt de basis gelegd van het rekenen met complexe getallen. De in dit hoofdstuk behandelde kennis heb je voor elk bovengenoemd onderwerp nodig.

Overzicht van de behandelde onderwerpen



Toelichting:
De in de Inleiding genoemde onderwerpen zijn in het schema hierboven met grijze vlakken aangegeven. Zij vormen het uitgangspunt bij het doorwerken van de module. Afhankelijk van de beschikbare tijd en je belangstelling kun je kiezen hoeveel van deze onderwerpen je wilt uitdiepen. De nieuwe kennis die je nodig hebt wordt genoemd in de witte vakjes. De pijlen wijzen steeds in de richting van de benodigde kennis.
Uit het schema blijkt bijvoorbeeld dat je voor het bewijzen van een aantal formules niet alleen iets moet weten van complexe getallen, maar ook van MacLaurinreeksen. Als je echter deze formules niet wilt bewijzen, hoef je de paragraaf over MacLaurinreeksen ook niet door te werken. Verder kun je zien dat het bewijzen van deze formules niet noodzakelijk is om de rest te kunnen begrijpen.

1 Rekenen met complexe getallen

1.1 Definities.

De grootste getallenverzameling die je tot nu toe hebt leren kennen, is de verzameling **R** van de reële getallen. Deze verzameling omvat alle getallen die wij kennen.
Je kunt de verzameling **R** in gedachten tekenen op een getallenlijn die loopt van -∞ tot +∞. Deze getallenlijn is dan precies "vol". Er kunnen geen andere getallen meer bij.

Wiskundigen hebben een getal bedacht, voorgesteld door de letter i, dat als eigenschap heeft dat het kwadraat ervan –1 is. Dit getal kan niet reëel zijn, want alle reële getallen zijn in het kwadraat groter of gelijk aan 0.

Door het getal i te vermenigvuldigen met een willekeurig getal, ontstaat een zogenaamd imaginair getal. Voorbeelden van imaginaire getallen zijn: i, 2i, $\sqrt{5}\cdot$i, πi enz. Ook 0 (= 0i) is een imaginair getal.

Per definitie geldt: $\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$

Door i te vermenigvuldigen met een reëel getal y ontstaat een **imaginair getal** yi.

De verzameling van alle imaginaire getallen is even groot als de verzameling **R**, omdat je voor y elk reëel getal kunt kiezen.

1 **a** Volgens de definitie is $\mathrm{i}^2 = -1$. Bereken $(-\mathrm{i})^2$.
b Los op in **R**: $z^2 = -1$.
c Los de vergelijking $z^2 = -1$ ook op als je gebruik mag maken van imaginaire getallen.
d Bereken i^3; i^4; i^5; $-\mathrm{i}^2$; $(-\mathrm{i})^4$ en $(-2\mathrm{i})^2$.
e Los op (met behulp van imaginaire getallen): $z^2 = -4$ en $z^2 = -5$.
f Toon aan $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.

Getallen van de vorm $z = x + y\mathrm{i}$ noemt men **complexe getallen**.
Het getal x heet het **reële deel**, notatie Re(z)
Het getal y heet het **imaginaire deel** (dus zonder i!)**,** notatie Im(z).

De verzameling van alle complexe getallen wordt aangeduid met **C.**

De **geconjugeerde van een complex getal** $z = x + y\mathrm{i}$ is het getal $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$

Notatie: $\overline{x + y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$

2 Gegeven is het getal $z = 5 + 2\mathrm{i}$.

a Geef Re(z), Im(z) en $\bar{z}$.

b Bereken: $-z$; $-\bar{z}$; $\overline{-z}$.

c Onderzoek of algemeen geldt: $\overline{-z} = -\bar{z}$ en bewijs je antwoord.

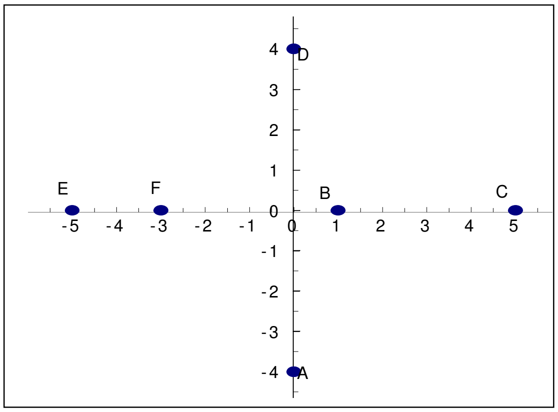
3 Bereken Re(2i); Im(−2i) ; $\bar{5}$ en $\overline{2\mathrm{i}}$

4 **a** Is 7 een complex getal? En 3i?
b Is i^2 een imaginair getal? Licht toe.
c Is i^2 een complex getal? Licht toe.

1.2 Meetkundige voorstelling van complexe getallen

De grote wiskundige Gauss heeft een manier bedacht om reële getallen en imaginaire getallen samen zichtbaar te maken. Hij gebruikte hiervoor een loodrecht assenstelsel. Op de horizontale as zette hij de reële getallen, op de verticale as zette hij de imaginaire getallen. Zo vind je op de horizontale as het punt (3,0) dat het getal 3 representeert en op de verticale as het punt (0,2) dat het getal 2i representeert. De oorsprong O stelt het getal 0 voor, dat zowel reëel is als imaginair.

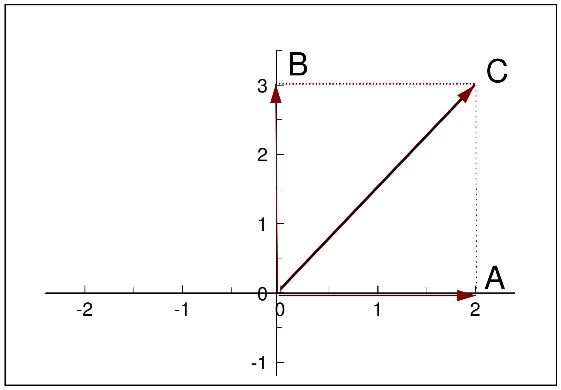
5 **a** Welk punt in het assenstelsel hiernaast stelt het getal 5 voor? En het getal –4i?
b Welke getallen worden voorgesteld door de volgende punten:
(0, 3); (−2, 0); (4, 0); (0, −6).



Punt $A(2, 0)$ stelt het getal 2 voor. Daarom komt vector **OA** overeen met het getal 2.
We noteren voor het gemak: **OA = 2**

Punt $B(0, 3)$ stelt getal 3i voor, dus **OB** =3i

Vector **OC = OA + OB** = 2 + 3i
Blijkbaar stelt punt C het getal 2 + 3i voor.



Bij ieder complex getal $x + y$i hoort een punt (x, y) in een assenstelsel.
Omgekeerd hoort bij ieder punt (x, y) een complex getal $x + y$i.
Alle complexe getallen samen vullen het hele vlak op.
Men noemt dit vlak het **Gauss-vlak**.

6 Gegeven is het getal $z = 4 + 3\text{i}$

a Teken z in het Gauss-vlak als een vector.

b Teken ook $-z$; $\overline{z}$ en $\overline{-z}$ als vectoren.

c Noem in alle drie gevallen van vraag b een meetkundige bewerking waarmee de getekende vectoren ontstaan uit de vector van vraag a.

7 **a** Teken in het Gaussvlak de complexe getallen $z_1 = 2 + \text{i}$ en $z_2 = 2 + 4\text{i}$.

b Teken de vectorsom $z_1 + z_2$. Welk complex getal hoort bij de somvector?

c Welke conclusie kun je uit vraag b trekken over het optellen van complexe getallen?

d Teken ook de vector $-3 \cdot z_1$. Welk complex getal hoort hierbij?

e Welke conclusie kun je trekken uit vraag d?

1.3 Bewerkingen met complexe getallen.

In opgave 7 heb voor een aantal gevallen al ontdekt dat bij het rekenen met complexe getallen in principe dezelfde regels gelden als voor het rekenen met reële getallen.

Optellen:	$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$
Aftrekken:	$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$
Vermenigvuldigen:	$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$ (haakjes wegwerken)

8 Bereken:

a $(2 - 4\mathrm{i}) + 5\mathrm{i}$
b $3(-1 + \mathrm{i}) + (4 - 2\mathrm{i})$
c $2 + 6\mathrm{i} - (3 + 4\mathrm{i})$
d $2(-3 + 2\mathrm{i}) - 4(1 + 3\mathrm{i})$
e $\mathrm{i} - 2(3 - \mathrm{i}) + 2(\mathrm{i} - 4)$
f $\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5$

9 **a** Bewijs de formule voor vermenigvuldigen uit het grijze vlak.
b Bereken op soortgelijke wijze $(3 + 4\mathrm{i})(-2 - 3\mathrm{i})$.

10 **G**egeven is het getal $z = 5 + 2\mathrm{i}$

a Bereken $z \cdot \bar{z}$
b Beantwoord vraag a ook voor het getal $z = c + d\mathrm{i}$

Omdat alle complexe getallen voorgesteld kunnen worden door een vector in het Gauss-vlak, moet ook de uitkomst van een deling een vector in het vlak opleveren. Het moet dus mogelijk zijn om de uitkomst van de deling te schrijven in de vorm $x + y\mathrm{i}$.

Bekijk de deling $\frac{2+5\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$. Je wilt van de noemer met daarin het getal i af.
In opgave 10 heb je gezien dat als een complex getal vermenigvuldigt met zijn geconjugeerde, de uitkomst een reëel getal is. De truc bij delen is daarom om teller en noemer te vermenigvuldigen met het getal 1, geschreven als $\frac{\text{geconjugeerde noemer}}{\text{geconjugeerde noemer}}$.

11 **a** Bereken $\frac{2+5\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} \cdot \frac{3+4\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$ en werk je antwoord uit tot de vorm $x + y\mathrm{i}$.
b Bereken op dezelfde manier: $\frac{1+\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}}$ en $\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$

Delen: $\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} \cdot \frac{c-d\mathrm{i}}{c-d\mathrm{i}} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$ (onthoud de truc!)

Als je meer dan twee complexe getallen wilt vermenigvuldigen of delen, of als je wilt machtsverheffen (= herhaald vermenigvuldigen) brengt de methode die hierboven is behandeld erg veel werk met zich mee. Het op deze wijze uitrekenen van $(2 + 3\mathrm{i})^8$ is onbegonnen werk.
In de volgende paragraaf leer je een andere notatie van complexe getallen, die veel geschikter is voor het vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen van complexe getallen dan de ($x + y$i)-vorm. Daarom spreken we het volgende af.

We gebruiken de notatie van complexe getallen in de vorm $z = x + y\mathrm{i}$ uitsluitend om complexe getallen op te tellen of van elkaar af te trekken.

1.4 Poolcoördinaten.

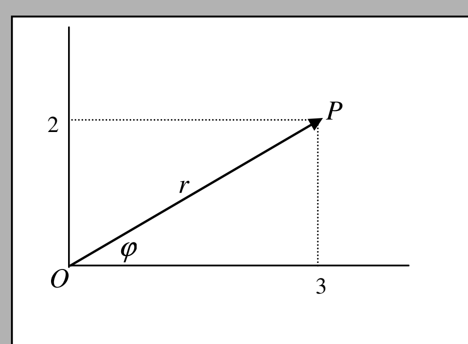
In deze paragraaf wordt een andere manier om punten in het vlak te noteren besproken. Het is mogelijk dat je deze stof al gehad hebt. Je kunt deze paragraaf dan gewoon overslaan.

De plaats van punt P kun je vastleggen met de coördinaten (3,2).
Zulke gewone coördinaten heten **cartesische coördinaten**.

Je kunt de plaats van P echter ook vastleggen met behulp van de afstand r van P tot de oorsprong O en de hoek φ tussen OP en de positieve x-as.

We noemen r en φ de **poolcoördinaten**

φ drukken we uit in radialen.



De cartesische coördinaten van P zijn: (3, 2)
De poolcoördinaten van P zijn: $r = \sqrt{13}$ en $\varphi = 33{,}7° = 0{,}59$ rad.

12 Teken in een assenstelsel de punten met de volgende poolcoördinaten.

a $A(r = 2$ en $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ rad) **b** $B(r = 1$ en $\varphi = 3\frac{3}{4}\pi$ rad)

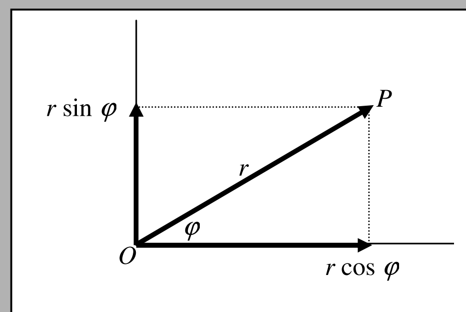
13 Geef de poolcoördinaten van de volgende punten.

a (2, 0) **c** (0, 5)

b (−3, 0) **d** (2, 2)

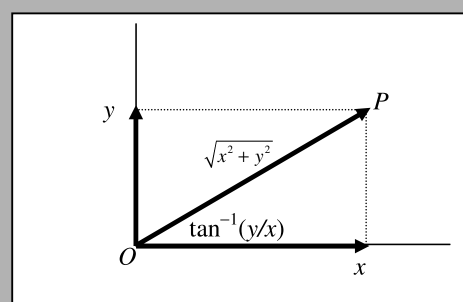
Voor het omrekenen van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten gelden de volgende formules:

$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi$$



Voor het omrekenen van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten gelden de volgende formules:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$



14 Gegeven zijn de punten $P(3, 3)$ en $Q(-3, -3)$.

a Bereken voor beide punten r en tan φ.

b Bereken φ op je rekenmachine met behulp van de $\tan^{-1}$ functie.

c Waarom kunnen P en Q niet dezelfde poolcoördinaten hebben?

d Teken P en Q in het assenstelsel en bepaal *uit de tekening* de juiste waarden van φ.

e Geef nu de poolcoördinaten van P en Q.

In opgave 14 loop je tegen het volgende probleem op.
Je rekenmachine geeft als uitkomst van $\tan^{-1}(y/x)$ altijd waarden van φ in het eerste of het vierde kwadrant. (φ ligt dan in $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$.)
Dat wil zeggen dat je voor punten in het tweede en derde kwadrant uit je rekenmachine niet de juiste waarde van φ krijgt. Door bij de waarde van φ die je rekenmachine geeft π radialen op te tellen, kom je wel goed uit. Je moet hier wel zelf aan denken!

Voor punten met een negatieve x-coördinaat (in het tweede en derde kwadrant) geldt:

$$\boxed{\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi}$$

Voorbeeld.
P is het punt met $r = 2$ en $\varphi = 0{,}35$ rad.
$x = 2 \cdot \cos 0{,}35 = 1{,}88$;
$y = 2 \cdot \sin 0{,}35 = 0{,}69$
De cartesische coördinaten van P zijn: (1,88; 0,69).

Q is het punt (−4, 6).
$r = \sqrt{((-4)^2 + 6^2)} = 7{,}2$
$\tan \varphi = \dfrac{6}{-4} = -1{,}5$
De rekenmachine geeft: $\tan^{-1}(-1{,}5) = -0{,}98$.
Omdat φ in II ligt (negatieve x-coördinaat) geldt: $\varphi = -0{,}98 + \pi = 2{,}16$.
De poolcoördinaten van Q zijn: $r = 7{,}2$ en $\varphi = 2{,}16$.

15 Reken om van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten.
a $r = 4$ en $\varphi = \frac{1}{3}\pi$
b $r = 4$ en $\varphi = 1{,}5$
c $r = 2$ en $\varphi = \pi$.
d $r = 1$ en $\varphi = 300$

16 Reken om van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten.
a (3, 7)
b (−2, 1)
c (2,3; 4,84)
d (−1,42; −5,61)

1.5 Een andere notatie voor complexe getallen.

Een complex getal $z = x + y\mathrm{i}$ wordt voorgesteld door het punt (x, y) in het Gauss-vlak.
Stel dat bij dit punt de poolcoördinaten r en φ horen. Dan geldt:

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad \text{en} \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

Als we dit invullen in $z = x + y\mathrm{i}$, krijgen we

$$z = r \cdot \cos \varphi + (r \cdot \sin \varphi) \cdot \mathrm{i}$$

Dit laatste kun je schrijven als:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$$

De wiskundige Euler heeft aangetoond dat je het stuk tussen haakjes kunt schrijven als een e-macht. Volgens Euler geldt:

$$\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi = \mathrm{e}^{\varphi \mathrm{i}}$$

Het bewijs van deze formule komt aan de orde in hoofdstuk 4 . Je hoeft je alleen in dit bewijs te verdiepen als je het onderwerp "formules bewijzen" gekozen hebt. Ook zonder bewijs kunnen we de formule goed gebruiken.

Met de formule van Euler kun je z nu schrijven als:

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{\varphi \mathrm{i}}$$

De lengte van de vector ***OP*** naar het punt $\boldsymbol{P}(r, \varphi)$ in het Gauss-vlak is gelijk aan r. Deze lengte wordt ook wel de **modulus van *z*** genoemd. Notatie: $|z|$.
Het getal φ stelt de hoek voor die deze vector maakt met de horizontale (reële) as. Dit getal wordt ook wel het **argument van *z*** genoemd. Notatie: $\arg(z)$.

Elk complex getal kan worden voorgesteld door een punt in het Gauss-vlak.
Omdat er twee manieren zijn om een punt in een vlak vast te leggen, zijn er ook twee manieren om een complex getal te noteren.

1. Met behulp van cartesische coördinaten x en y.
Er geldt: $x = \mathrm{Re}(z)$ en $y = \mathrm{Im}(z)$.

Notaties: $\boxed{z = x + y\mathrm{i}}$ of $z = (x, y)$

Deze notaties gebruik je bij **optellen** en **aftrekken**.

2. Met behulp van de poolcoördinaten r en φ.
Er geldt: $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$

Notaties: $\boxed{z = r \cdot \mathrm{e}^{\varphi \mathrm{i}}}$ of $z = r(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$

Deze notaties gebruik je bij **vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen.**

Deze $r \cdot \mathrm{e}^{\varphi \mathrm{i}}$ -vorm van een complex getal is bijzonder handig om te gebruiken bij vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen.

Voorbeeld.
Schrijf het complexe getal $z = 3 - 4i$ in de vorm $re^{\varphi i}$.

z kan worden voorgesteld door het punt P (3, −4).
De poolcoördinaten van P vind je met de formules:

$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ en $\tan \varphi = \frac{-4}{3}$, dus $\varphi = \tan^{-1}(-1{,}333) = -0{,}93$
De poolcoördinaten van P zijn $r = 5$ en $\varphi = -0{,}93$.

Hieruit volgt: $z = 5e^{-0{,}93i}$

Voorbeeld.
Schrijf $z = 3e^{4i}$ in de vorm $x + yi$.

De poolcoördinaten van z zijn: $r = 3$ en $\varphi = 4$.
Er geldt:

$x = 3 \cos 4 = -1{,}96$ en $y = 3 \sin 4 = -2{,}27$

Hieruit volgt: $z = -1{,}96 - 2{,}27i$

17 Reken om naar de vorm $z = r\, e^{\varphi i}$.

a $z = 4 + 2i$

b $z = -2 - i$

c $z = -4$

d $z = 2i$

18 Reken om naar de vorm $z = x + yi$.

a $z = 5e^{2{,}5i}$

b $z = e^{-\frac{1}{3}\pi i}$

De grafische rekenmachine biedt de mogelijkheid om met complexe getallen te rekenen.
Hoe dit precies gaat kun je in de handleiding terugvinden. Voor bezitters van een TI-84 volgt hieronder een voorbeeld van de mogelijkheden.

Voorbeeld (TI-84)
Stel via MODE de rekenmachine op de notatie re^θi .
Voer in het gewone scherm het getal 1+ i in (de i zit boven de decimale punt op de onderste rij) en druk op ENTER: de uitvoer is 1,414e(.785i). Blijkbaar is $1 + i = 1{,}414 \cdot e^{0{,}785i}$.
Omgekeerd: zet via MODE de rekenmachine op a +bi en voer in het gewone scherm het getal 2e^(πi/6) in. Na drukken op ENTER vind je: 1,732 + i.

1.6 Vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen

In paragraaf 1.3 heb je gezien dat je complexe getallen kunt vermenigvuldigen door de haakjes weg te werken. Als z in de $x + y$i-vorm staat ligt dat voor de hand.
Stel nu $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cdot \mathrm{i})$ en $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \mathrm{i})$.
Je kunt het product $z_1 \cdot z_2$ dan nog steeds uitwerken door de haakjes weg te werken. Bij het vereenvoudigen van het antwoord heb je een aantal goniometrische formules nodig.

Stel $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cdot \mathrm{i})$
$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \mathrm{i})$
$z_3 = r_3(\cos\varphi_3 + \sin\varphi_3 \cdot \mathrm{i})$

Stel verder $z_3 = z_1 \cdot z_2$ .Je kunt dan bewijzen dat geldt:
$r_3 = r_1 \cdot r_2$ en $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$.

In hoofdstuk 4 wordt ingegaan op het bewijs van deze stelling. Je hoeft hier alleen naar te kijken als je gekozen hebt voor het onderwerp "formules bewijzen".

Omdat volgens Euler geldt: $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\varphi\mathrm{i}}$, kunnen we deze stelling ook toepassen als we complexe getallen in de vorm $r\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{i}}$ schrijven. Dit betekent in de praktijk dat je met complexe e-machten net zo kunt rekenen als met gewone e-machten. Je kunt de gewone rekenregels voor machten gebruiken bij vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen van machten. In de rest van deze paragraaf maken we daar gebruik van.

Voorbeeld
$5\mathrm{e}^4 \cdot 2\mathrm{e}^3 = 5 \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{4+3} = 10\mathrm{e}^7 \rightarrow 5\mathrm{e}^{4\mathrm{i}} \cdot 2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}} = 5 \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{4\mathrm{i}+3\mathrm{i}} = 10\mathrm{e}^{7\mathrm{i}}$
$20\mathrm{e}^6 : 10\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e}^{6-2} = 2\mathrm{e}^4 \rightarrow 20\mathrm{e}^{6\mathrm{i}} : 10\mathrm{e}^{2\mathrm{i}} = 2\mathrm{e}^{6\mathrm{i}-2\mathrm{i}} = 2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}}$
$(2\mathrm{e}^3)^4 = 2^4 \cdot \mathrm{e}^{3 \cdot 4} = 16\mathrm{e}^{12} \rightarrow (2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}})^4 = 2^4 \cdot \mathrm{e}^{3 \cdot 4\mathrm{i}} = 16\mathrm{e}^{12\mathrm{i}}$

Stel dat $z_1 = r_1 \cdot \mathrm{e}^{\varphi_1\mathrm{i}}$ en $z_2 = r_2 \cdot \mathrm{e}^{\varphi_2\mathrm{i}}$

Vermenigvuldigen:	$z_3 = z_1 \cdot z_2$	$\rightarrow r_3 = r_1 \cdot r_2$	en	$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$
Delen:	$z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$	$\rightarrow r_3 = \dfrac{r_1}{r_2}$	en	$\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$
Machtsverheffen:	$z_3 = (z_1)^n$	$\rightarrow r_3 = (r_1)^n$	en	$\varphi_3 = n \cdot \varphi_1$

.

19 Bereken de volgende getallen. Reken indien nodig eerst om naar (r, φ)-notatie.
Doe dit eerst zonder grafische rekenmachine.

a $(4e^{5i})^4$

b $\dfrac{4e^{5i}}{3e^{-2i}}$

c $(3 + 5i)^4$

d $(3 + 5i) \cdot (6 - 2i)$

e $(6 - 2i)^3 \cdot (3 + 5i)^8$

f $\dfrac{3+5i}{6-2i}$

20 Bereken eerst zonder de grafische rekenmachine te gebruiken. Controleer je antwoord eventueel met de GR.

a $4e^{5i} + 3e^{-2i}$

b $\dfrac{4e^{5i} + 3e^{-2i}}{(3 + 5i)^3}$

1.7 Reële uitkomsten.

Als complexe getallen gebruikt worden in berekeningen over technische problemen, wil men vaak weten onder welke voorwaarde de uitkomst van zo'n berekening een reëel getal voorstelt. Zo is bij wisselstromen de hoekfrequentie ω een belangrijke (reële) variabele, die voorkomt in berekeningen met complexe getallen.

Voorbeeld
Stel de uitkomst van zo'n berekening is $z = 1 - \omega^2 + (4 - \omega)i$.

$\text{Re}(z) = 1 - \omega^2$ en $\text{Im}(z) = 4 - \omega$.
z is reëel als $\text{Im}(z) = 0$.
Dit levert in dit geval: $4 - \omega = 0$, dus $\omega = 4$.
De uitkomst van z is dan: $1 - 4^2 = -15$.

Een complex getal van de vorm $z = x + yi$ is reëel als $\text{Im}(z) = y = 0$

Een complex getal van de vorm $z = r \cdot e^{\varphi i}$ is reëel als $\arg(z) = \varphi = 0 + k \cdot \pi$

21 Welk getal stelt $z = 4e^{\varphi i}$ voor als $\varphi = 0$; $\varphi = \pi$ en $\varphi = 2\pi$?

Bij veel technisch interessante gevallen is z in de vorm van een breuk gegeven.
Het wordt dan iets ingewikkelder om te bepalen onder welke voorwaarde z reëel is.

Stel $z = \dfrac{a+b\text{i}}{c+d\text{i}}$.

Uit de rekenregel voor delen volgt: $\varphi_{\text{breuk}} = \varphi_{\text{teller}} - \varphi_{\text{noemer}}$.
Volgens bovenstaande regel is een breuk reëel als $\varphi_{\text{breuk}} = 0 + k\cdot\pi$.
Hieruit volgt: $\varphi_{\text{teller}} - \varphi_{\text{noemer}} = 0 + k\cdot\pi$, dus $\varphi_{\text{teller}} = \varphi_{\text{noemer}} + k\cdot\pi$.
Maar dan geldt ook: $\tan(\varphi_{\text{teller}}) = \tan(\varphi_{\text{noemer}} + k\cdot\pi) = \tan(\varphi_{\text{noemer}})$,
want de tangensfunctie heeft periode π.
Voor de teller geldt: $\tan(\varphi_{\text{teller}}) = \dfrac{b}{a}$. Voor de noemer geldt: $\tan(\varphi_{\text{noemer}}) = \dfrac{d}{c}$.
De breuk is reëel als deze tangensen aan elkaar gelijk zijn.

Een breuk is reëel onder de volgende voorwaarde: $\tan(\varphi_{\text{teller}}) = \tan(\varphi_{\text{noemer}})$

Als de breuk geschreven is in de vorm $z = \dfrac{a+b\text{i}}{c+d\text{i}}$ volgt uit deze voorwaarde $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$.

Of in woorden: een breuk is reëel als geldt: $\dfrac{\text{Im}(teller)}{\text{Re}(teller)} = \dfrac{\text{Im}(noemer)}{\text{Re}(noemer)}$

Voorbeeld
Gegeven is $z = \dfrac{1-\omega^2 + \text{i}\cdot 5\omega}{2\omega + \text{i}\cdot(4+\omega)}$.

Im(teller) is 5ω, Re(teller) = $1 - \omega^2$; Im(noemer) = $4 + \omega$, Re(noemer) = 2ω.

z = reëel als geldt: $\dfrac{5\omega}{1-\omega^2} = \dfrac{4+\omega}{2\omega}$.

Bovenstaande vergelijking geeft de *voorwaarde* waaronder z reëel is.
Door de vergelijking op te lossen vind je de waarde van ω waarvoor dit zo is.

22 Ga na onder welke *voorwaarde* de volgende getallen reëel zijn.
(Je hoeft hier dus geen waarden van ω te berekenen.)

a $z = 7\omega - 3 + \text{i}(2 + 5\omega)$

b $z = \dfrac{2\omega + 4 - 5\omega\cdot\text{i}}{4 + \omega\cdot\text{i}}$

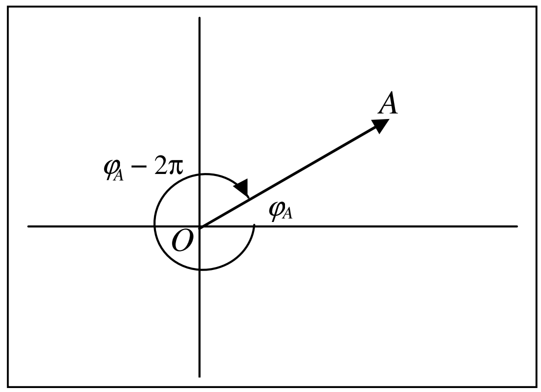
c $z = 1 + \omega^2 + \text{i}(3\omega - \dfrac{5}{\omega})$

d $z = \dfrac{5+2\omega}{4\omega\cdot\text{i}}$

2 Wiskundige toepassingen

In dit hoofdstuk bekijken verschillende soorten vergelijkingen. Voordat we kijken hoe verschillende vergelijkingen in het algemeen worden opgelost, moet er eerst aandacht worden besteed aan het volgende.

Een getal a wordt voorgesteld door één punt A in het Gauss-vlak. Hoewel er maar één paar cartesische coördinaten (x_A, y_A) is dat punt A beschrijft, zijn er oneindig veel paren poolcoördinaten waarmee je punt A kunt beschrijven. Deze paren hebben allemaal dezelfde r_A, maar voor φ zijn er oneindig veel mogelijkheden, die een geheel aantal malen 2π radialen verschillen. Immers, stel dat vector $\boldsymbol{OA}$ een hoek φ_A maakt met de positieve x-as. Als je $\boldsymbol{OA}$ een geheel aantal malen 2π radialen draait, kom je weer uit op punt A.



Bij een punt A in het Gauss-vlak horen de poolcoördinaten r_A en $\varphi_A + k \cdot 2\pi$. Hierin is k een geheel getal.

Als bij het oplossen van vergelijkingen poolcoördinaten gebruikt moeten worden, schrijven we een complex getal altijd in de vorm:

$$\boxed{z = r \cdot e^{(\varphi + k \cdot 2\pi) \cdot i}}$$

2.1 Complexe wortels

Onder de **n-de wortel** uit z verstaan we een getal w waarvoor geldt:

$$\boxed{w = \sqrt[n]{z} \quad \rightarrow \quad w^n = z}$$

Voorbeeld.
Bereken $\sqrt[4]{-16}$

Stel $z = \sqrt[4]{-16}$, dan geldt $z^4 = -16$.
Om deze vergelijking op te lossen schrijf je zowel z als –16 in de vorm $re^{\varphi i}$, omdat dit bij machtsverheffen de meeste geschikte vorm is.

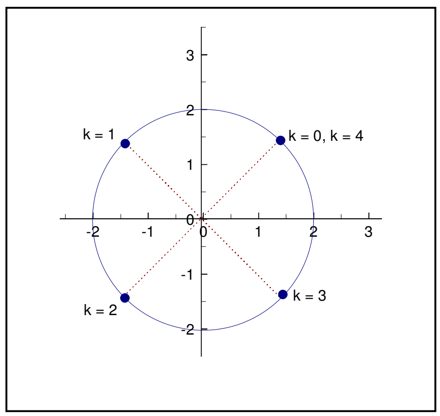
$(re^{\varphi i})^4 = 16e^{(\pi + k \cdot 2\pi) \cdot i}$, dus $r^4 \cdot e^{4\varphi i} = 16 \cdot e^{(\pi + k \cdot 2\pi)\, i}$

Links en rechts van het =-teken moeten de moduli en de argumenten gelijk zijn:
$r^4 = 16$ en $4\varphi = \pi + k \cdot 2\pi$.

Uit $r^4 = 16$ volgt: $r = 2$.
Uit $4\varphi = \pi + k \cdot 2\pi$ volgt: $\varphi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.
De algemene oplossing is: $z = 2\, e^{(\pi/4 + k \cdot \pi/2)\, i}$.

In dit voorbeeld komt in de algemene oplossing nog de letter k voor. Dit is nodig, omdat deze vergelijking meerdere oplossingen heeft. Bij iedere waarde van k hoort één oplossing.

Omdat r voor alle oplossingen gelijk is aan 2, liggen alle oplossingen op een cirkel met middelpunt O en straal 2. Door voor k verschillende gehele getallen in te vullen, vinden we de hoeken die bij de verschillende oplossingen horen.



$k = 0$: $\varphi = \frac{1}{4}\pi + 0 \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi$
$k = 1$: $\varphi = \frac{1}{4}\pi + 1 \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi$
$k = 2$: $\varphi = \frac{1}{4}\pi + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{4}\pi$
$k = 3$: $\varphi = \frac{1}{4}\pi + 3 \cdot \frac{1}{2}\pi = 1\frac{3}{4}\pi$
$k = 4$: $\varphi = \frac{1}{4}\pi + 4 \cdot \frac{1}{2}\pi = 2\frac{1}{4}\pi$

Merk op dat bij $k = 4$ hetzelfde punt hoort als bij $k = 0$.
Zo hoort bij $k = 5$ hetzelfde punt als bij $k = 1$, maar ook als bij $k = 9$, $k = 13$ etc.
Welke andere waarde voor k je ook neemt, er komen geen andere punten meer bij. Omdat er bij deze vergelijking 4 verschillende punten in het Gauss-vlak horen, zijn er precies 4 verschillende oplossingen.

Dit betekent dat er binnen de verzameling van de complexe getallen precies vier getallen zijn die in aanmerking komen voor de titel $\sqrt[4]{-16}$. Dit in tegenstelling tot wat je gewend bent bij wortels uit reële getallen. Onder $\sqrt{9}$ verstaan we binnen de reële getallen alleen 3 en niet –3, hoewel 3^2 én $(-3)^2$ allebei gelijk aan 9 zijn. Binnen de complexe getallen zijn zowel 3 als –3 aan te merken als $\sqrt{9}$.

De vergelijking $\boxed{z^n = a}$ heeft n verschillende oplossingen.

Stel $\mathrm{a} = \mathrm{r_A} \mathrm{e}^{(\varphi(\mathrm{A}) + \mathrm{k} \cdot 2\pi)\mathrm{i}}$

Voor de oplossingen $z = r\,\mathrm{e}^{\varphi \mathrm{i}}$ geldt:

$$r = (r_A)^{1/n} \quad \text{en} \quad \varphi = \frac{\varphi_A}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Door voor k precies n opeenvolgende gehele getallen in te vullen, vind je alle verschillende oplossingen.
Elk van deze oplossingen komt in aanmerking voor de titel $\sqrt[n]{z}$.

Alle wortels liggen op regelmatige afstanden van elkaar op een cirkel met straal $\sqrt[n]{r_A}$.

1 Los de volgende vergelijkingen op en teken de oplossingen in het Gauss-vlak.

a $z^3 = -1$ **b** $2z^4 + 4 = 2\mathrm{i}$

2 Bereken de volgende wortels in **C.**

a $\sqrt{25}$ **c** $\sqrt{25\mathrm{i}}$ **e** $\sqrt[3]{25}$

b $\sqrt{-25}$ **d** $\sqrt{-25\mathrm{i}}$ **f** $\sqrt[4]{25}$

3 Bereken de wortels van opgave 22 binnen de reële getallen (indien mogelijk).

4 Bereken $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ en $\sqrt[n]{1+\mathrm{i}}$.

2.2 Complexe logaritmen

Onder de **complexe (natuurlijke) logaritme** uit een getal z verstaan we het getal w waarvoor geldt:

$$w = \ln(z) \quad \rightarrow \quad e^{w} = z$$

Voorbeeld.
Bereken ln(4 + 3i).

Stel $z = \ln(4 + 3i)$, dan geldt $e^z = 4 + 3i$.
Omdat z nu in de exponent van de e-macht voorkomt, is het niet handig om z met poolcoördinaten te schrijven. Je krijgt dan een e-macht in de exponent.
Schrijf dus z in de vorm $x + yi$.
Omdat er links van het = teken een macht staat, is het wel handig om 4 + 3i met poolcoördinaten te schrijven. Je vindt:

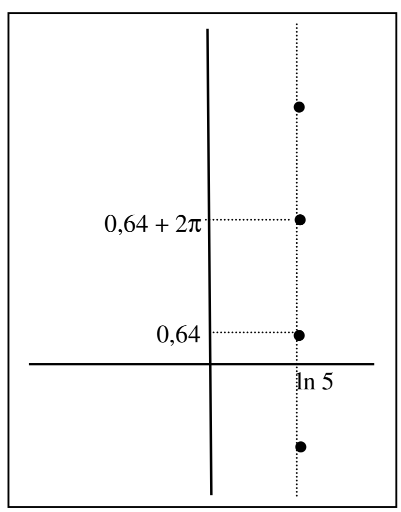
$$e^{(x + yi)} = 5e^{(0{,}64 + k \cdot 2\pi)i}$$
$$e^{x} \cdot e^{yi} = 5 \cdot e^{(0{,}64 + k \cdot 2\pi)\, i}$$

Stel nu de delen zonder i aan elkaar gelijk en doe hetzelfde met de delen die i bevatten:

$e^x = 5$ en $e^{yi} = e^{(0{,}64 + k \cdot 2\pi)\, i}$
$x = \ln 5$ en $y = 0{,}64 + k \cdot 2\pi$

Hiermee vinden we : $z = \ln 5 + (0{,}64 + k \cdot 2\pi) \cdot i = \ln(4 + 3i)$

Er zijn in dit geval oneindig veel oplossingen. Immers, bij iedere waarde van k hoort een ander punt in het Gauss-vlak.
Hiernaast zijn de punten getekend die horen bij $k = -1$, 0, 1 en 2.



$k = -1$: $z = (\ln 5; -5{,}64)$
$k = 0$: $z = (\ln 5; 0{,}64)$
$k = 1$: $z = (\ln 5; 6{,}92)$
$k = 1$: $z = (\ln 5; 13{,}21)$

Alle oplossingen liggen op de lijn met vergelijking $x = \ln 5$. Ook hier geldt dat alle oplossingen aanspraak kunnen maken op de titel ln(4 +3i).

De vergelijking $\boxed{e^z = a}$ heeft oneindig veel oplossingen.

Deze oplossingen vind je als volgt.

Stel $\mathrm{a} = \mathrm{r_A} \cdot \mathrm{e}^{(\varphi_\mathrm{A} + \mathrm{k}\cdot 2\pi)\mathrm{i}}$

Voor de oplossingen $z = x + y$i geldt:
$x = \ln r_A$ en $y = \varphi_\mathrm{A} + k \cdot 2\pi$

Als $a = r_\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{\varphi_A \mathrm{i}}$, dan is $\ln a = \ln r_\mathrm{A} + (\varphi_\mathrm{A} + k \cdot 2\pi)\mathrm{i}$

Bij ieder geheel getal k hoort een andere oplossing. Al deze oplossingen liggen op een verticale lijn de vergelijking $x = \ln(r_\mathrm{A})$. Alle oplossingen komen in aanmerking voor de titel ln a.

5 Los op.

a $\mathrm{e}^z = 3 - 4\mathrm{i}$

b $2e^{z-3} = 8e^{2{,}5\mathrm{i}}$

6 Bereken in **C**:

a ln 2

b ln (−2)

c ln (2i)

d ln (−2i)

2.3 Polynomen

Een **polynoom** is een functie van de vorm $p(z) = a_\mathrm{n}\cdot z^\mathrm{n} + a_{\mathrm{n}-1}\cdot z^{\mathrm{n}-1} +.. + a_1 z + a_0$.

Hierin is z de complexe variabele en zijn a_0 t/m a_n complexe coëfficiënten.
$a_\mathrm{n} \neq 0$, want anders valt de term met z^n weg (en kan je hem net zo goed weglaten).

Een getal z is een **nulpunt** van het polynoom als geldt: $p(z) = 0$

Om de nulpunten te vinden moet je de vergelijking $a_\mathrm{n}\cdot z^\mathrm{n} + a_{\mathrm{n}-1}\cdot z^{\mathrm{n}-1} +.. + a_1 z + a_0 = 0$ oplossen.

Voorbeeld.
Los op: $z^5 + z^4 + 3z^3 = 0$

Haal z^3 buiten haakjes: $z^3\,(z^2 + z + 3) = 0$
$z^3 = 0$ of $z^2 + z + 3 = 0$

$z = 0$ of $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(-11)}$

In **R** zou het deel dat volgt uit de abc-formule geen oplossingen geven, omdat daar $\sqrt{(-11)}$ niet bestaat. In **C** echter geldt: $\sqrt{(-11)} = \pm\, \mathrm{i} \cdot \sqrt{11}$ (zie ook paragraaf 2.1).

De oplossing van deze vergelijking is:

$z = 0$ of $z = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{11}\cdot \mathrm{i}$ of $z = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{11}\cdot \mathrm{i}$

Een opmerking over de oplossing $z = 0$.
$z^3 = 0$ kun je schrijven als $z \cdot z \cdot z = 0$. Dit levert als antwoord $z = 0$ of $z = 0$ of $z = 0$.
Het antwoord $z = 0$ komt dus eigenlijk drie keer voor en heet een drievoudig nulpunt.

Hoofdstelling van de algebra:
Er bestaan n complexe getallen z_1 t/m z_n zo, dat het n-degraadspolynoom
$p(z) = a_n{\cdot}z^n + a_{n-1}{\cdot}z^{n-1} + .. + a_1 z + a_0$ geschreven kan worden als
$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$.

De getallen z_1 t/m z_n zijn de nulpunten van het n-degraadspolynoom.
Deze nulpunten hoeven niet allemaal verschillend zijn. Als een nulpunt k maal voorkomt, heet zo'n nulpunt een k-voudig nulpunt. k heet de **multipliciteit** van het nulpunt.

Hieruit volgt:
Als je rekening houdt met de multipliciteit van de nulpunten heeft elke n-degraadsvergelijking precies n complexe oplossingen. Het aantal *verschillende* oplossingen is *maximaal* gelijk aan n.

Voorbeeld
Schrijf het polynoom $p(z) = 2z^9 - 32z^5$ in de vorm $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$.

Omdat de getallen z_1 t/m z_n de nulpunten van het polynoom zijn, lossen we op:
$p(z) = 2z^9 - 32z^5 = 2z^5(z^4 - 16) = 0$
Dit levert: $z^5 = 0$ (vijfvoudig nulpunt $z = 0$) of $z^4 = 16$ (levert: $z = -2$, 2, 2i en -2i).
a_n is de coëfficiënt van de hoogste macht van z, dus $a_n = 2$.

Oplossing: $p(z) = 2z^9 - 32z^5 = 2(z - 0)^5(z - 2)(z + 2)(z - 2\mathrm{i})(z + 2\mathrm{i})$

7 Schrijf het polynoom $p(z) = z^8 - 82z^4 + 81$ in de vorm $p(z) = a_n(z - z_{1)})(z - z_2)...(z - z_n)$
Tip: neem $z^4 = p$ en los eerst op $p^2 - 82p + 81 = 0$.

8 Bereken alle oplossingen van de volgende vergelijkingen.

a $z^2 + z + 1 = 0$

b $3z^4 = 6z^3 - 12z^2$

c $iz^2 + 2z + 3i = 0$

d $z^5 = 1$

e $z^3 = 2 - 2i$

f $(z^2 + 7)(z^3 - 1) = 0$

g $2e^z = 4 + 6i$

h $(5 - 2i)\, z^3 = i$

i $e^{-z+5} = 2i$

j $3z^2 = 1 + i$

3 Differentiaalvergelijkingen

Dit hoofdstuk is bedoeld voor degenen die de eerste onderzoeksvraag uit de inleiding gekozen hebben. Als je de derde onderzoeksvraag (hoofdstuk 5) gekozen hebt, heb je dit hoofdstuk als achtergrondinformatie nodig. Maak wel de gewone opgaven, maar sla de onderzoeksopgaven 10, 11 en 12 over.

3.1 Introductie differentiaalvergelijkingen

Een belangrijke toepassing van complexe getallen kom je tegen bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen. In deze paragraaf leer je wat differentiaalvergelijkingen zijn. In de volgende paragraaf ga je dieper in op differentiaalvergelijkingen waarbij complexe getallen een rol spelen.

Bij de beschrijving van onderzoeksvraag 3 over massaveersystemen (inleiding) kwam de volgende vergelijking aan de orde:

$$m \cdot u'' + d \cdot u' + C \cdot u = 0$$

In deze vergelijking stelt u een functie voor van de tijd, dus $u = u(t)$. De parameters m, d en C stellen getallen voor die volgen uit de natuurkundige context. Hoe bovenstaande vergelijking is ontstaan kun je vinden in hoofdstuk 5.

Omdat in bovenstaande vergelijking behalve u ook afgeleiden van u voorkomen noemen we zo'n vergelijking een differentiaalvergelijking. Differentiaalvergelijkingen beschrijven een verschijnsel in termen van functies en hun afgeleiden, zonder dat de functie zelf bekend is. Het oplossen van een differentiaalvergelijking komt neer op het zoeken naar alle functies die de vergelijking kloppend maken.
Om na te gaan of een bepaalde functie een oplossing is van een differentiaalvergelijking, vul je de functie en haar afgeleide(n) in de differentiaalvergelijking in. Als er dan een betrekking komt te staan die klopt voor *iedere waarde van t die kan voorkomen*, dan zegt men dat deze functie voldoet aan de differentiaalvergelijking.

Voorbeeld.
Gegeven is de differentiaalvergelijking $u''(t) + u(t) = 0$.
Ga na of de functie $u(t) = \sin t$ een oplossing is van deze differentiaalvergelijking.

Door tweemaal te differentiëren vinden we: $u'(t) = \cos t$
$u''(t) = -\sin t$

Invullen van $u(t)$ en $u''(t)$ in de differentiaalvergelijking levert:

$-\sin t + \sin t = 0$, dus $0 = 0$

Dit is altijd waar, wat je ook voor t invult.
Daarom is $u(t) = \sin t$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking.

Een functie die voldoet aan een differentiaalvergelijking is een **oplossing** van die **differentiaalvergelijking**.

Je kunt door invullen nagaan of een functie voldoet aan een differentiaalvergelijking. De betrekking die je op die manier krijgt, moet waar zijn voor *iedere* mogelijke waarde van t.

1 In het voorbeeld was gegeven de differentiaalvergelijking $u'' + u = 0$.
Ga na welke van de volgende functies oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking.
a $u(t) = \cos t$
b $u(t) = 2 \sin t$
c $u(t) = \sin 2t$
d $u(t) = 2 \sin t + 3 \cos t$

2 Iemand beweert dat $u(t) = \cos 2t$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking uit opgave 1. Immers, $u''(t) = -4 \cos 2t$ en invullen levert: $-3 \cos 2t = 0$.
Deze laatste vergelijking heeft als oplossing $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
Voor deze waarden van t klopt de bewering dus.
Heeft deze persoon gelijk? Licht je antwoord toe.

3 **a** Toon aan dat $u(t) = A \sin t + B \cos t$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $u'' + u = 0$. (A en B zijn constanten)
b Leg uit waarom deze differentiaalvergelijking oneindig veel oplossingen heeft.

Bij het oplossen van een differentiaalvergelijking zoek je naar *alle* mogelijke oplossingen van deze differentiaalvergelijking. Deze oplossingen verschillen slechts in een of meerdere constanten van elkaar.

Een oplossing waarin nog onbekende constanten voorkomen, noemt men een **algemene oplossing** van de differentiaalvergelijking.
Zijn de waarden van deze constanten bekend, dan spreekt men van een **specifieke oplossing**.

4 Gegeven is de differentiaalvergelijking: $y' + y = 0$
a Ga na met welke van de volgende functies de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking overeen komt.
$y = e^t + C$; $y = C \cdot e^t$; $y = e^{-t} + C$; $y = C \cdot e^{-t}$
b De grafiek van de oplossing van deze differentiaalvergelijking gaat door (0, 2). Bepaal de waarde van C die bij deze specifieke oplossing hoort.

Veel technische en natuurkundige verschijnselen kunnen worden beschreven door middel van differentiaalvergelijkingen. Als men één bepaald verschijnsel met een differentiaalvergelijking beschrijft, is het niet voldoende om de algemene oplossing te weten. Men wil dan uit alle mogelijke oplossingen precies die oplossing hebben, die het specifieke verschijnsel beschrijft. In de praktijk betekent dit dat men de waarde(n) van de constante(n) moet zien te vinden. Deze constante(n) kun je berekenen, als je naast de differentiaalvergelijking aanvullende informatie hebt over het verschijnsel, bijvoorbeeld over de situatie op tijdstip $t = 0$.

De situatie op tijdstip $t = 0$ kun je beschrijven door middel van zogenaamde **beginvoorwaarden**.

Notatie: $y(0) = 1$ en $y'(0) = 2$.
Betekenis: op $t = 0$ is $y = 1$ en is $y' = 2$

Voorbeeld.
Een populatie bacteriën groeit volgens de differentiaalvergelijking:

$A' - 2A = 0.$

Op $t = 0$ zijn er 100 bacteriën. t is in uren.

Ga na dat de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking gegeven wordt door de functie: $A(t) = C \cdot e^{2t}$.
De beginvoorwaarde luidt: $A(0) = 100$.
Vul je in de algemene oplossing voor t het getal 0 in, dan moet A gelijk worden aan 100.

$100 = C \cdot e^{2 \cdot 0} = C \cdot 1 = C.$
Hieruit volgt: $C = 100$.

De specifieke oplossing is in dit geval: $A(t) = 100 \cdot e^{2t}$

5 Zoals we in opgave 3 gezien hebben, is de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $u'' + u = 0$ gelijk aan $u(t) = A \sin t + B \cos t$.
Bij deze differentiaalvergelijking zijn de volgende beginvoorwaarden gegeven:
$u(0) = 4$ en $u'(0) = 2$.
- **a** Wat volgt er uit de voorwaarde $u(0) = 4$ voor A en B?
- **b** Bepaal $u'(t)$. Laat de constanten A en B gewoon staan.
- **c** Wat volgt uit de voorwaarde $u'(0) = 2$ voor A en B?
- **d** Geef de specifiek oplossing van deze differentiaalvergelijking.
  Welke beginvoorwaarde hoort bij deze differentiaalvergelijking?

3.2 De homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking

Een differentiaalvergelijking waarin de hoogste afgeleide een twee afgeleide is heet een **tweede orde differentiaalvergelijking**.

De algemene oplossing bevat altijd twee constanten. Om deze constanten te kunnen berekenen zijn *twee* beginvoorwaarden nodig.
Vaak zijn dat de waarden van $y(0)$ en $y'(0)$.

Deze paragraaf gaat over een bijzonder type tweede orde differentiaalvergelijking, de homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking. De algemene vorm is:
$ay'' + by' + cy = 0$.

6 Gegeven is de differentiaalvergelijking: $2y'' + y' - y = 0$.
Als oplossing proberen we: $y = C \cdot e^{px}$. Hierin zijn p en C onbekende getallen.

- **a** Bepaal y' en y''.
- **b** Vul y'', y' en y in de differentiaalvergelijking in.
  Toon aan dat hieruit volgt: $2p^2 + p - 1 = 0$
- **c** Bepaal de waarden p_1 en p_2 die aan bovenstaande vergelijking voldoen.

De **homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking** heeft de vorm**:**

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$$

Als oplossing voldoet in principe: $y = e^{px}$
Bij het bepalen van de waarde(n) van p moet je de volgende vergelijking oplossen:

$ap^2 + bp + c = 0$

Deze tweedegraads vergelijking noemt men de **karakteristieke vergelijking**.
Merk op dat je de karakteristieke vergelijking kunt vinden door y'' te vervangen door p^2, y' door p en y door 1 (kun je weglaten).

Als de discriminant $D > 0$, heeft de karakteristieke vergelijking twee oplossingen, p_1 en p_2.
Dit levert de oplossingen $y_1 = e^{p_1 x}$ en $y_2 = e^{p_2 x}$. Voor een homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking geldt dat dan ook de *lineaire combinatie* $y = Ay_1 + By_2$ voldoet.

7 In deze opgave toon je door invullen aan dat $y = A \cdot e^{p_1 x} + B \cdot e^{p_2 x}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $ay'' + by' + cy = 0$.

a Bereken y' en y''.

b Vul y'', y' en y in de differentiaalvergelijking in.

c Toon aan dat je het resultaat kunt herleiden tot:

$A e^{p_1 x}(a(p_1)^2 + bp_1 + c) + B e^{p_2 x}(a(p_2)^2 + bp_2 + c) = 0$

d Voltooi het bewijs.

e Bestaat er nog een getal p_3 zo, dat $y = C \cdot e^{p_3 x}$ een oplossing is van deze differentiaalvergelijking?

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$ is:

$$\boxed{y = A \cdot e^{p_1 x} + B \cdot e^{p_2 x}}$$

Deze oplossing is een **lineaire combinatie** van de oplossingen $y_1 = e^{p_1 x}$ en $y_2 = e^{p_2 x}$ die direct volgen uit de karakteristieke vergelijking.

Voorbeeld.

Los op: $y'' + 3y' + 2y = 0$ met $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$

In de differentiaalvergelijking is $a = 1$, $b = 3$ en $c = 2$.
De karakteristieke vergelijking is dus:

$p^2 + 3p + 2 = 0$.

Met de abc-formule vind je: $p = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1}$

Hieruit volgt: $p_1 = 1$ en $p_2 = 2$.

De algemene oplossing is: $y = A \cdot e^x + B \cdot e^{2x}$.

Uit $y(0) = 0$ volgt: $A \cdot e^0 + B \cdot e^0 = 0$, dus $A = -B$.
Uit $y'(0) = 2$ volgt: $A \cdot e^0 + 2B \cdot e^0 = -B + 2B = 2$.
Hieruit volgt: $B = 2$ en $A = -2$.

De specifieke oplossing is: $y = -2e^x + 2e^{2x}$.

8 Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

a	$y'' + 5y' + 4y = 0$	met $y(0) = 10$ en $y'(0) = 0$
b	$y'' - 3y' = 0$	met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$
c	$y'' - 4y = 0$	met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$
d	$y'' - 2 = 0$	met $y(0) = 10$ en $y'(0) = 0$

Bovenstaande methode werkt prima zolang de discriminant D > 0 is. Als D = 0 heb je maar één oplossing p_1 voor p. Toch zijn er ook dan twee oplossingen mogelijk.

9 Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'' + 2y' + y = 0$.
a Geef de karakteristieke vergelijking en los deze op.
b Toon aan dat $y = A \cdot e^{-x}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking.
c Toon aan dat $y = Bx \cdot e^{-x}$ ook een oplossing is van de differentiaalvergelijking.

Als in de karakteristieke vergelijking de discriminant D = 0, is de oplossing voor p gelijk aan:

$$p = \frac{-b}{2a} = p_1$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dan:

$$\boxed{y = A \cdot e^{p_1 x} + Bx \cdot e^{p_1 x}}$$

3.3 Reële oplossing bij een negatieve discriminant

In deze paragraaf ga je de onderzoeksvraag uit de inleiding beantwoorden.
Als de discriminant D < 0 , heeft de karakteristieke vergelijking geen (reële) oplossingen. Toch is juist dit geval technisch erg interessant. Zo voldoen bijvoorbeeld massa-veersystemen aan een homogene tweede orde differentiaalvergelijking waarvan de discriminant kleiner is dan 0. In de volgende opgaven leid je af hoe je met behulp van complexe getallen uiteindelijk tot reële oplossingen kunt komen.

10* Gegeven is de differentiaalvergelijking: $y'' + 2y' + 5y = 0$
a Ga na dat uit de karakteristieke vergelijking volgt: $p = -1 \pm 2i$
b Uit a volgt dat $y_1 = \alpha e^{(-1+2i)x}$ en $y_2 = \beta e^{(-1-2i)x}$ oplossingen zijn. Hierin stellen α en β willekeurige complexe getallen voor. Leg uit dat dan ook $y_3 = \beta e^{(-1+2i)x}$ en $y_4 = \alpha e^{(-1-2i)x}$ oplossingen zijn..

(*) Omdat dit onderzoeksvragen zijn, staat het antwoord van deze opgaven niet in de uitwerkingen voor de leerlingen. Als je er echt niet uitkomt, kun je aan je docent een tip vragen. In de handleiding voor docenten staan de bewijzen volledig uitgewerkt.

In al deze oplossingen komt het getal i voor in de exponent. Ook de getallen α en β kunnen complexe getallen zijn. Om tot reële oplossingen te komen kun je een trucje gebruiken.
De gedachte achter de truc is de volgende:
Alle lineaire combinaties van oplossingen zijn zelf ook weer oplossingen van de differentiaalvergelijking. Dus ook $y_5 = y_1 + y_4$ en $y_6 = y_2 - y_3$ zijn oplossingen.
Ga na: $y_5 = \alpha e^{(-1+2i)x} + \alpha e^{(-1-2i)x} = \alpha(e^{(-1+2i)x} + e^{(-1-2i)x})$ en $y_6 = B(e^{(-1+2i)x} - e^{(-1-2i)x})$.
Met deze laatste twee oplossingen werken we verder.

11* **a** Toon aan dat $y_5 = \alpha e^{-x}(e^{2ix} + e^{-2ix})$.

b Met behulp van goniometrie kun je aantonen dat geldt:
$\cos(-t) = \cos t$ en $\sin(-t) = -\sin t$.
Toon met behulp van deze formules en de formule van Euler aan dat je het antwoord van vraag a ook kunt schrijven als $y_5 = 2\alpha e^{-x}\cos 2x$.

c Toon op soortgelijke wijze aan dat $y_6 = 2i\beta e^{-x}\sin 2x$.

12* Ook de lineaire combinatie $y_7 = y_5 + y_6$ is een (algemene) oplossing van de differentiaalvergelijking.

a Toon aan dat de algemene oplossing te schrijven is als
$y_7 = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ en druk A en B uit in α en β

b Als A en B reële getallen zijn, stelt y_7 een reële functie voor.
Leg aan de hand van vraag a uit dat er altijd waarden van α en β te vinden zijn waarvoor A en B reëel zijn. Aan welke voorwaarden moeten α en β dan voldoen?

In de opgaven 11 en 12 horen de getallen α en β bij de oplossing met de complexe e-machten en de getallen A en B bij de reële oplossing. In deze opgaven heb je aangetoond dat, als je voor α een reëel en voor β een imaginair getal kiest, de oplossing met de complexe e-machten in werkelijkheid gewoon een reële functie voorstelt. Nu je hebt aangetoond dat bij een negatieve discriminant de oplossing te schrijven is als een vermenigvuldiging van een e-macht met een sinus-en een cosinusfunctie, kun je de stap met de complexe e-machten verder overslaan en direct werken met de formule die in vraag 12b als y_7 genoteerd is.

Als in de karakteristieke vergelijking $ap^2 + bp + c = 0$ de discriminant $D < 0$ is, kun je de oplossing voor p schrijven als:

$$p = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{-D}}{2a}$$

Je kunt deze oplossing schrijven in de vorm: $p = \lambda \pm \mu \cdot i$
De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dan:

$$\boxed{y = e^{\lambda x}(A\cos \mu x + B\sin \mu x)}$$

Voorbeeld.
Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'' + y' + y = 0$ met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$

De karakteristieke vergelijking is: $p^2 + p + 1 = 0$
Uit de abc-formule volgt: $p = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$

Je kunt dit schrijven als: $p = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \mathrm{i}$. Hieruit volgt: $\lambda = -\tfrac{1}{2}$ en $\mu = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$.
De algemene oplossing is: $y = e^{\frac{1}{2}x}\ (A \cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x) + B \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x))$

Om de constanten A en B te bepalen, moet je eerst (met de productregel) y' bepalen:

$$y' = -\tfrac{1}{2}\, e^{\frac{1}{2}x}\ (A \cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x) + B \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x)) + e^{\frac{1}{2}x}\, x(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ A \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ B \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x)$$

Uit $y(0) = 1$ volgt: $\mathrm{e}^0(A \cdot 1 + B \cdot 0) = 1$, dus $A = 1$.
Uit $y'(0) = 0$ volgt: $-\tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^0(1 \cdot 1 + B \cdot 0) + \mathrm{e}^0(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1 \cdot 0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot B \cdot 1) = 0$
Uitwerken levert: $-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot B = 0$. Hieruit volgt: $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$
De specifieke oplossing is: $y = e^{\frac{1}{2}x}(\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x))$

13 Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen.

a	$y'' + 2y' - 3y = 0$	**d**	$y'' + 3y = 0$
b	$y'' + 5y' = 0$	**e**	$y'' - 2y' + 2y = 0$
c	$y'' + 6y' + 9y = 0$	**f**	$y'' - 2y' + 6y = 0$

14 Bepaal de specifieke oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen.

a	$y'' + 4y = 0$	met $y(0) = 5$ en $y'(0) = 0$
b	$y'' + 4y' + 4y = 0$	met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 1$

4 Formules bewijzen

Dit hoofdstuk is bedoeld voor diegenen die als onderzoeksvraag het bewijzen van formules hebben gekozen. Als je een andere onderzoeksvraag hebt gekozen, kun je dit hoofdstuk overslaan.

De wiskunde die je tot nu toe op de middelbare school geleerd hebt is vooral toepassingsgericht. Je hebt verschillende manieren geleerd om wiskundige problemen op te lossen. Daarbij gebruik je allerlei regels en formules, zonder dat je precies weet waar deze vandaan komen en onder welke voorwaarden ze geldig zijn. In repetities wordt zelden naar een bewijs gevraagd. In de formele wiskunde moeten stellingen (beweringen, die je kunt toepassen bij het oplossen van problemen) altijd bewezen worden. Als je een exacte studierichting kiest, krijg je hier zeker mee te maken. Als je wilt weten of je dat leuk vindt, is dit hoofdstuk geschikt om daar achter te komen.

4.1 De reeks van MacLaurin

In paragraaf 1.5 werd de formule $\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi = \mathrm{e}^{\varphi \mathrm{i}}$ van Euler geïntroduceerd. In deze paragraaf verzamel je de benodigde kennis om deze formule te kunnen bewijzen. Het feitelijke bewijs komt in paragraaf 4.2. De stof die in deze paragraaf behandeld wordt, is een vast onderdeel van het eerstejaars wiskundepakket van elke exacte studierichting. De theorie en de notaties zijn wat abstracter dan je gewend bent. Door de opgaven te maken, kun je de abstracte theorie voor jezelf concreter maken. Er zijn zeer veel toepassingen van de reeksen die hier worden besproken. Een voorbeeld is je rekenmachine, die op grond van hier behandelde principes allerlei functies kan benaderen. Om deze paragraaf te kunnen begrijpen moet je kennis hebben van de differentiaalrekening.

Voor de zekerheid vind je hier een overzicht van een aantal functies en hun afgeleiden die je in de paragraaf nodig hebt. Verder heb je nodig: de betekenis van n-faculteit

$$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$$
$$f(x) = \mathrm{e}^x \rightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x$$
$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$
$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$$

De Engelse wiskundige Brook Taylor (1685 -1731) heeft een manier bedacht om een willekeurige functie te schrijven als een reeks van machten. Een speciaal geval hiervan is genoemd naar de Schotse wiskundige Colin McLaurin.

De reeks van MacLaurin heeft de volgende gedaante: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...a_nx^n + ...$
De reeks heeft in principe oneindig veel termen. We komen hierop terug in opgave 6.
Allereerst ga je onderzoeken hoe je de getallen a_0 tot en met a_n kunt berekenen.

1 Volgens MacLaurin is $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...a_nx^n + ...$

- **a** Door 0 in te vullen vind je: $f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + ...a_n \cdot 0^n + ...$
  Bereken hieruit a_0, uitgedrukt in $f(0)$.
- **b** Door beide kanten te differentiëren vind je: $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ...na_nx^{n-1} + ...$
  Vul weer in beide kanten 0 in en bereken hiermee a_1, uitgedrukt in $f'(0)$.
- **c** Voor de tweede afgeleide schrijven we f'', voor de derde afgeleide schrijven we $f^{(3)}$ en voor de n-de afgeleide schrijven we $f^{(n)}$. Bereken door herhaald differentiëren a_2 en a_3, uitgedrukt tweede en derde afgeleiden voor $x = 0$.
- **d** Toon aan dat $f^{(4)}(0) = 4! \cdot a_4$ en bereken hieruit a_4.
- **e** Bedenk nu zelf een formule om a_n mee te berekenen.

De algemene vorm van de MacLaurinreeks is:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

2 In deze opgave leid je de MacLaurinreeks voor $f(x) = e^x$ af.

- **a** Bereken $f'(x)$, $f''(x)$ en $f^{(n)}(x)$.
- **b** Bereken $f'(0)$, $f''(0)$ en $f^{(n)}(0)$.
- **c** Bereken met de formule hierboven de MacLaurinreeks voor e^x. Laat de faculteiten gewoon in de formule staan.

3 In deze opgave bereken je een aantal termen van de MacLaurinreeks voor $f(x) = \sin x$.

- **a** Bereken $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ en $f^{(4)}(0)$
- **b** Schrijf $f^{(5)}(0)$ tot en met $f^{(8)}(0)$ op *zonder* verder nog iets uit te rekenen.
- **c** Leg nu uit waarom er in de MacLaurinreeks voor sin x alleen maar oneven machten van x voorkomen.
- **d** Geef de termen van de MacLaurinreeks voor sin x tot en met x^9

Op soortgelijke wijze als in opgave 3 kun je de MacLaurinreeks voor cos x berekenen. Hieronder staan de algemene formules voor drie belangrijke functies bij elkaar.

MacLaurinreeksen:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

4 De laatste (algemene) term van sin x is $\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

- **a** Welk getal moet je voor n invullen om de term met x^7 te krijgen? En voor x^9?
- **b** Laat zien dat je voor deze waarden van n inderdaad de termen voor x^7 en x^9 krijgt die je in opgave 3d zelf hebt uitgerekend.
- **c** Bereken op soortgelijke wijze de termen met x^6 en x^8 in de formule voor cos x.

5 In deze opgave bekijken we de afgeleiden van de MacLaurinreeksen hierboven.

- **a** Schrijf de eerste 5 termen op van de MacLaurinreeks voor e^x.
- **b** Differentieer de termen van vraag a.
- **c** Van welke functie is de reeks van vraag b (als je die oneindig ver door laat gaan) een MacLaurinreeks? Wat volgt hieruit voor de afgeleide van $f(x)$?
- **d** Differentieer ook de MacLaurinreeksen voor sin x
- **e** Wat is de betekenis van de reeks die je bij vraag d gekregen hebt?

Een toepassing: de rekenmachine.

Rekenmachines kunnen eigenlijk alleen optellen en aftrekken. Andere wiskundige bewerkingen moeten herleid worden tot optellen en aftrekken. Zo is vermenigvuldigen hetzelfde als herhaald optellen en delen hetzelfde als herhaald aftrekken. Machtsverheffen is weer herhaald vermenigvuldigen, en via die stap ook weer te herleiden tot iets met optellen. Door functies als e^x, sin x etc met behulp van reeksen (er zijn ook andere rekesen dan de MacLaurinreeks) te schrijven als een rij van machten, kun je ook dit soort functies uiteindelijk herleiden tot optellingen. De vraag is nu, hoe zit het met de nauwkeurigheid van dit soort benaderingen?

De reeks bestaat in principe uit oneindig veel termen. Dat wil zeggen dat het functievoorschrift $f(x)$ en de machtreeks voor een getal x pas exact dezelfde uitkomst opleveren als je in de machtreeks oneindig veel termen invult. Voor een benadering op bijvoorbeeld twee decimalen nauwkeurig zijn slechts enkele termen voldoende.

Een benadering die gebruik maakt van de MacLaurinreeks tot en met de term met x^n heet een n-de orde benadering.

6 De vierde-orde benadering met de MacLaurinreeks van e^x is: $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$

a Laat zien dat deze vierde-orde benadering volgt uit de algemene formule voor de MacLaurinreeks.

b Bereken op je rekenmachine de "exacte" waarde van e^x voor $x = 1$. Bereken voor deze waarde van x ook de vierde-orde benadering.

c Bereken voor $x = 1$ ook de uitkomst van de eerste-, tweede- en derde-ordebenadering van e^x.

d Bereken voor $x = 1$ het verschil tussen de "exacte" waarde van e^x en de eerste-ordebenadering. Doe dit ook voor de tweede t/m de vierde-ordebenadering

e Waarom staan bij de vragen b en d het woord exact tussen aanhalingstekens?

In opgave 6 zie je dat de nauwkeurigheid van een benadering groter wordt als n toeneemt. Hoe groter n, des te kleiner is het verschil met de exacte waarde. Als n oneindig groot wordt, nadert het verschil tot 0.

4.2 Een bewijs voor de formule van Euler

7* In de inleiding van deze module stond de volgende **onderzoeksvraag**:
"Een centrale formule bij het werken met complexe getallen is de formule van Euler:

$$\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi = e^{\varphi \mathrm{i}}$$

Zoek een bewijs voor deze formule".

Euler gebruikte bij zijn bewijs de machtreeksen voor e^x, $\sin x$ en $\cos x$, die in paragraaf 3.1 zijn afgeleid.
Bedenk zelf hoe je de genoemde machtreeksen kunt gebruiken om deze formule te bewijzen en schrijf het bewijs overzichtelijk op.
Tip: je kunt zowel met de linkerkant als de rechterkant van de formule beginnen. Bedenk zelf wat het handigst is.

8* Het tweede deel van de **onderzoeksvraag** luidde: "Ga na hoe je met behulp van deze formule $\sin x$ en $\cos x$ kunt schrijven als een combinatie van complexe e-machten".

a Toon aan**:** $\dfrac{e^{x\mathrm{i}} + e^{-x\mathrm{i}}}{2} = \cos x$.

Tip: Zoek in Wisforta geschikte formules voor $\cos(-t)$ en $\sin(-t)$.

b Bedenk naar analogie van vraag a zelf een formule voor $\sin x$, geschreven als een combinatie van complexe e-machten en bewijs je formule.

(*) Omdat dit onderzoeksvragen zijn, staat het antwoord van deze opgaven niet in de uitwerkingen voor de leerlingen. Als je er echt niet uitkomt, kun je aan je docent een tip vragen. In de handleiding voor docenten staan de bewijzen volledig uitgewerkt.

4.3 De stelling van De Moivre

9* "Het derde deel van de onderzoeksvraag luidde: "Een belangrijke stelling is de stelling van De Moivre:

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)$$

Zoek een bewijs voor deze stelling."
De eenvoudigste manier om deze stelling te bewijzen is door de formule van Euler te gebruiken. Bewijs de stelling van De Moivre eerst op deze manier.

10* De Moivre zelf maakte bij het bewijzen van zijn stelling gebruik van goniometrische formules. Stel $z_1 = \cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\cdot i$; $z_2 = \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cdot i$ en $z_3 = \cos\varphi_3 + \sin\varphi_3\cdot i$.
In deze opgave bewijs je de stelling voor het geval $n = 2$.

a Stel dat $z_3 = z_1\cdot z_2$.Toon aan:
$z_3 = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cdot(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2))$.

b Uit de goniometrie zijn de volgende formules bekend:
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta$.
Toon met behulp van deze formules en het resultaat van vraag a aan:
$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$.

c Laat zien hoe uit het antwoord op vraag b het bewijs van de stelling van De Moivre volgt voor $n = 2$.

11* Om de stelling van De Moivre te kunnen bewijzen, moet je gebruik maken van het *principe van volledige inductie.*
Bij dit principe ga je na of de stelling ook waar is als je n vervangt door $n + 1$.
Als je dit kunt aantonen én je een kleinste waarde van n weet waarvoor de stelling zeker klopt, dan heb je hiermee bewezen dat de stelling ook voor alle volgende (hele) waarden van n klopt en daarmee dus algemeen geldig is.

a Toon aan dat de stelling klopt voor $n + 1$, aangenomen dat hij klopt voor n.
Je moet dus aantonen dat
$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^{n+1} = \cos(n+1)\varphi + i\cdot\sin(n+1)\varphi$, waarbij je alles kunt toepassen wat je in opgave 10 geleerd hebt.

b In vraag 10c is aangetoond $(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^2 = \cos(2\varphi) + i\cdot\sin(2\varphi)$.
Voor $n = 2$ klopt de stelling $(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)$ dus.
Leg nu in je eigen woorden uit waarom de stelling dan ook voor *alle* hele waarden groter dan 2 geldt. Als je dat kunt, snap je het principe van volledige inductie en heb je bovendien de stelling van De Moivre volledig bewezen.

c Geldt de stelling van De Moivre ook voor $n = 1$? En voor $n = 0$? Bewijs je antwoord.

5 Differentiaalvergelijkingen in de natuurkunde

In dit hoofdstuk heb je de voorkennis over differentiaalvergelijkingen uit hoofdstuk 3 nodig.

5.1 De tweede wet van Newton

Veel mechanische verschijnselen in de natuur kunnen worden beschreven met de tweede wet van Newton. Deze luidt:

$$F = m \cdot a$$

Hierin is F de resulterende kracht op een voorwerp, m de totale massa waarop die kracht werkt en a de versnelling die het voorwerp ten gevolge van die kracht krijgt.
De verplaatsing s van het voorwerp is een functie van de tijd, dus $s = s(t)$.
De snelheid v die het voorwerp heeft, is de afgeleide van de verplaatsing.
Er geldt dus:

$$v(t) = s'(t).$$

De versnelling a van het voorwerp is weer de afgeleide van de snelheid, dus geldt:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Hiermee kun je de tweede wet van Newton schrijven als :

$$F(t) = m \cdot s''(t) \quad \text{of} \quad F = m \cdot s''$$

Bovenstaande vergelijking bevat een (tweede) afgeleide functie. De tweede wet van Newton is dus eigenlijk een (tweede orde) differentiaalvergelijking. In opgave 1 bekijk je een vallend voorwerp (zonder wrijving).

1 Op een voorwerp werkt alleen de zwaartekracht $F_z = m \cdot g$. Hierin is g de versnelling van de zwaartekracht. Deze is in Nederland 9,81 m/s^2.
De tweede wet van Newton luidt in dit geval: $m \cdot g = m \cdot a$.

a Schrijf bovenstaande vergelijking in de vorm van een differentiaalvergelijking.

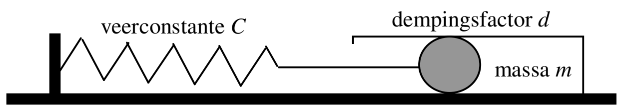
b Uit deze differentiaalvergelijking volgt: $s''(t) = g$.
Door te primitiveren vind je: $s'(t) = gt + A$. Hierin is A een constante (een getal).
Bepaal een formule voor $s(t)$.

c Wat is de betekenis van de constanten in de formule van vraag b?

5.2 Massaveersystemen

Trillingen komen in de techniek veel voor. Soms zijn ze gewenst, bijvoorbeeld bij het maken van muziek. Soms ook zijn ze hinderlijk, bijvoorbeeld als je in een auto rijdt over een slecht wegdek. In bepaalde gevallen kunnen trillingen scheuren veroorzaken in een boorplatform (door de voortdurende belasting van de zeegolven) of in vliegtuigvleugels (door de continue wisselende belasting door de lucht; denk bijvoorbeeld aan het optreden van turbulentie). De schade die hierdoor optreedt kan enorm zijn. In de techniek wordt daarom veel gerekend aan trillingen.

Een vereenvoudigde voorstelling van een trillend voorwerp is een massaveersysteem. Hierbij is een massa m bevestigd aan een veer met veerconstante C. Bij de beweging wordt de massa op elk moment teruggedreven door de veerkracht en de dempingkracht met dempingfactor d. Om het effect van de zwaartekracht op de beweging van de massa buiten beschouwing te laten, zorgen we ervoor dat de massa alleen in horizontale richting kan bewegen.



De beweging van het massaveersysteem wordt beschreven door de functie $u(t)$, waarbij u de uitwijking van de massa (ten opzichte van de evenwichtstand) is en t het tijdstip. De uitwijking u op tijdstip t hangt af van de krachten op de massa op tijdstip t.

2 In deze opgave bekijk je het geval zonder demping ($d = 0$).
Op een trillend voorwerp werkt alleen de veerkracht $F_v(t) = -C \cdot u(t)$.
Hierin is $u(t)$ de uitrekking van de veer. Dit is tevens de verplaatsing van het voorwerp op tijdstip t.
- **a** Geef de differentiaalvergelijking die in dit geval uit de tweede wet van Newton volgt.
- **b** Deze differentiaalvergelijking is een homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking. Toon dat aan.

3 Een massa van 2 kg hangt aan een veer met veerconstante $C = 1000$ N/m.
Op $t = 0$ bevindt de massa zich in zijn uiterste stand $u_{max} = 0{,}02$ m met een snelheid 0 m/s.
- **a** Stel de differentiaalvergelijking op die de beweging van dit massaveersysteem beschrijft.
- **b** Geef de beginvoorwaarden $u(0)$ en $u'(0)$.
- **c** Bereken de specifieke oplossing van deze differentiaalvergelijking.
- **d** Bepaal uit het antwoord van vraag c de amplitude en de frequentie van trilling.

4* In deze opgave beantwoord je één van de **onderzoeksvragen**. De vraag luidt:
"leid de differentiaalvergelijking af die de beweging van het massaveersysteem beschrijft in het (horizontale) geval mét demping".
Ga hierbij uit van de tweede wet van Newton, bekijk welke krachten er werken op de massa en houdt daarbij rekening met de richting waarin de krachten werken t.o.v. de richting waarin de massa beweegt. Van de dempingkracht is bekend dat deze rechtevenredig is met de snelheid waarmee de massa beweegt. De evenredigheidscontante is de dempingfactor *d*.

De uitwijking $u(t)$ van een massaveersysteem met massa m, veerconstante C en dempingfactor d wordt beschreven door de homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking:

$$\boxed{m \cdot u'' + d \cdot u' + C \cdot u = 0}$$

5 Gegeven is een horizontale veer met constante C = 100 N/m waaraan een massa van 400 gram is bevestigd. De massa wordt 5,0 cm uit de evenwichtstand getrokken en vervolgens zonder beginsnelheid losgelaten. Tijdens de trilling die het gevolg is, is de gemiddelde dempingfactor 2,0 kg/s.

a Stel de differentiaalvergelijking op die deze beweging beschrijft.
b Stel de beginvoorwaarden op.
c Bereken de functie $u(t)$.
d Na hoeveel seconden is de massa uitgetrild? (neem aan dat de trilling stopt als de uitwijking blijvend minder dan 1 % van de beginamplitude is geworden).

6 De veer uit opgave 5 is wel heel snel uitgetrild. Men zorgt daarom voor aanzienlijk minder demping. Bedenk een manier om bij benadering te berekenen bij welke waarden van *d* de trilling langer dan 10 seconden duurt, uitgaande van verder gelijke omstandigheden als in opgave 5? Neem weer aan dat de trilling stopt als de uitwijking blijvend minder dan 1 % van de beginamplitude is geworden.

7* Het tweede deel van de **onderzoeksvraag** gaat over de volgende formule voor de trillingstijd van een massaveersysteem zonder demping (zie BINAS):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}\,.$$

Leid deze formule af uit de homogene lineaire twee orde differentiaalvergelijking die deze beweging beschrijft. Als extra formule mag je formule $u(t) = u_{max}\cos(2\pi f t)$ gebruiken. Deze formule beschrijft de beweging voor het geval de massa op $t = 0$ zonder beginsnelheid in een uiterste stand wordt losgelaten.

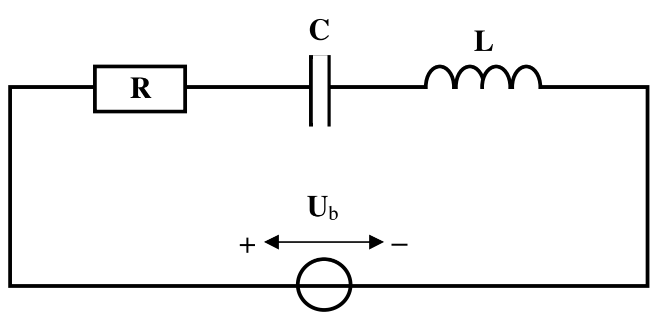
(*) Omdat dit onderzoeksvragen zijn, staat het antwoord van deze opgaven niet in de uitwerkingen voor de leerlingen. Als je er echt niet uitkomt, kun je aan je docent een tip vragen. In de handleiding voor docenten staan de bewijzen volledig uitgewerkt.

6 Elektrische filters

Lees dit eerst!
In dit hoofdstuk wordt een onderwerp uit de elektriciteitsleer besproken, waarbij complexe getallen ingezet worden om de wiskundige kant van het onderwerp te *vereenvoudigen*. Alle wiskunde in dit hoofdstuk is direct gekoppeld aan de natuurkundige context. Het hoofdstuk leent zich daarom goed om te koppelen aan een praktische opdracht voor natuurkunde. Het kan ook als achtergrondinformatie dienen voor een praktische opdracht of een profielwerkstuk waarin elektrische schakelingen voorkomen. Voordat je de nieuwe kennis kunt toepassen bij het beantwoorden van de laatste onderzoeksvraag, zul je eerst flink wat theorie moeten doorwerken. Kies dit hoofdstuk daarom alleen als je echt geïnteresseerd bent in toepassingen van de wiskunde in de natuurkunde en de techniek. De appendices bij dit hoofdstuk zijn te beschouwen als een toegift en behoort niet tot de stof die nodig is om de onderzoeksvragen te kunnen beantwoorden.

6.1 De RCL-serieschakeling

Deze paragraaf kun je beschouwen als een achtergrondverhaal. Je hoeft hiervan alleen de afspraken over enkele nieuwe termen (aan het eind) te onthouden.
In de figuur hieronder is een serieschakeling getekend van een weerstand *R*, een condensator met capaciteit *C* en een spoel met zelfinductiecoëfficiënt *L*. Het geheel is aangesloten op een spanningsbron die een *wissel*spanning u_B levert. De spanning over de weerstand noemen we u_R, die over de condensator u_C en die over de spoel u_L. Al deze spanningen zijn functies van de tijd.



Het verband tussen spanning en stroom sterkte wordt voor een weerstand, een spoel en een condensator door de volgende formules gegeven.

- Voor een *weerstand*: $u_R(t) = R \cdot i(t)$ (met R is de weerstand in Ohm),
- Voor een *spoel*: $u_L(t) = L \cdot i'(t)$ (met L is de zelfinductiecoëfficiënt in Henry)
- Voor een *condensator*: $u_C'(t) = 1/C \cdot i(t)$ (met C is de capaciteit in Farad)

Verder geldt: $u_{Bron} = u_R + u_C + u_L$.

Omdat in de formule voor de condensator de afgeleide van u voorkomt, is het handig om de formules voor de weerstand en de spoel te differentiëren. Je krijgt dan $u_R'(t) = R \cdot i'(t)$ en $u_L'(t) = L \cdot i''(t)$
Ook geldt: $(u_{Bron})' = (u_R)' + (u_L)' + (u_C)'$.
Als je in deze laatste formule de (gedifferentieerde) formules erboven invult krijg je:

$$u_b'(t) = R \cdot i'(t) + L \cdot i''(t) + \frac{1}{C} \cdot i(t) \ .$$

Het verband tussen de stroom $i(t)$ en de bronspanning $u_{bron}(t)$ in een ***RCL*-serieschakeling** geldt:

$$\boxed{L \cdot i'' + R \cdot i' + \frac{1}{C} \cdot i = u'}$$

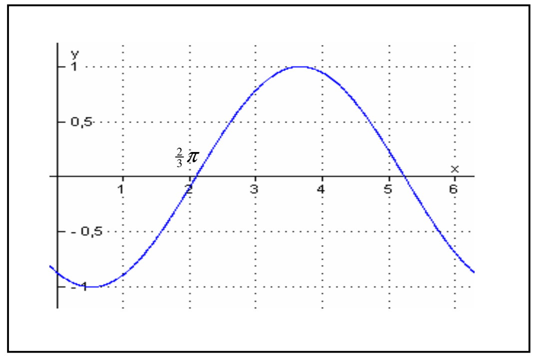
Dit is een niet-homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking. De benaming niet-homogeen komt doordat er rechts van het gelijkteken nu geen nul staat (vergelijk ook paragraaf 3.2).

Bovenstaande differentiaalvergelijking geldt voor een eenvoudige serieschakeling. Als in een schakeling ook vertakkingen voorkomen, wordt het verband tussen spanning en stroom niet door één differentiaalvergelijking beschreven, maar door stelsels van twee of meer differentiaalvergelijkingen van de eerste of tweede orde. Het oplossen van deze stelsels vergelijkingen is erg ingewikkeld. Daarom heeft men een alternatief bedacht. Hierbij worden de differentiaalvergelijkingen vervangen door lineaire vergelijkingen. De variabelen in deze vergelijkingen zijn complexe getallen. Voordat we hier nader op ingaan worden eerst een paar nieuwe termen en notaties besproken.

Enkele nieuwe termen

1) Het stopcontact levert een sinusvormige wisselspanning met een frequentie van 50 Hz. In dit hoofdstuk reken je niet met frequenties (f) in Hz, maar met **hoekfrequenties** (ω) in rad/s. Als een punt 50 keer per seconden een cirkel doorloopt ($f = 50$ Hz), draait dit punt per seconde over een hoek van $50 \cdot 2\pi = 100\pi$ radialen.
De hoekfrequentie is dan $\omega = 100\pi$ rad/s.

2) In het plaatje hiernaast gaat een sinusgrafiek bij een hoek $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ voor het eerst door de evenwichtstand omhoog. Bij de standaard sinusfunctie is dat bij $\alpha = 0$ het geval. Deze sinusfunctie ligt dus $\frac{2}{3}\pi$ achter op de standaardfunctie.
   De **fasehoek** is daarom $-\frac{2}{3}\pi$ radialen.



3) De gebruikelijke manier om een **sinusvormige wisselspanning** aan te geven is:

   $u(t) = u_{\max} \sin(\omega t + \varphi_u)$.

   Hierin is ω de *hoekfrequentie* en φ_u de *beginfasehoek* van de wisselspanning.

4) Omdat in de elektriciteit de letter *i* gebruikt wordt voor wisselstromen, is het gebruikelijk om bij elektrische toepassingen het wiskundige getal i te vervangen door j. In dit hoofdstuk geldt dus:

$$\boxed{\mathbf{j^2 = -1}}$$

6.2 Vertalen naar complexe getallen

In hoofdstuk 1 heb je geleerd: $re^{\varphi j} = r\cos\varphi + \mathrm{j} \cdot r\sin\varphi$.

In deze formule stelt φ een hoek voor. Stel dat $r = 5$ en dat hoek φ afhangt van de tijd *t,* volgens de formule $\varphi = 100t + 2$. Als je dit in de bovenstaande formule invult krijg je:

$$z = 5e^{(100t+2)j} = 5\cos(100t+2) + \mathrm{j} \cdot 5\sin(100t+2) .$$

Het getal z is ook te schrijven als $z = a + \mathrm{j} \cdot b$
Het imaginaire deel van dit getal is $b = 5\sin(100t + 2)$.
Als je alleen naar de vorm kijkt zou het getal b net zo goed een sinusvormige wisselspanning kunnen voorstellen met $u_{\max} = 5$ V, $\omega = 100$ rad/s en $\varphi_u = 2$ rad.

1 Gegeven is het complexe getal $z = 3e^{(20t-5)j}$.

a Schrijf dit getal in de $a + b$j vorm en bepaal het imaginaire deel van z.

b Welke wisselspanning heeft dezelfde formule als het imaginaire deel van z dat j je in vraag a hebt berekend?

2 Gegeven is de spanning $u(t) = 100 \sin(10t + 0{,}30)$

a Noem u_{max}, ω en φ_u

b Noem een complex getal waarvoor geldt: $\mathrm{Im}(z) = u(t)$

Je kunt bij iedere spanning $u(t)$ een complex getal z bedenken waarvoor geldt:

$\boxed{\mathbf{Im}(z) = u(t)}$

Ook het omgekeerde geldt.

Voorbeeld.
Noem een complex getal z dat past bij $u(t) = 8 \sin (2t + 1)$

$\mathrm{Im}(z) = u(\mathrm{t}) = 8 \sin(2t + 1)$, dus

$z = 8[(\cos(2t + 1) + j \sin(2t + 1)] = 8e^{(2t+1)\cdot j}$.

Voorbeeld
Bepaal $u(t)$ zo dat $u(t) = \mathrm{Im}(z)$ als $z = 5e^{(3t-4)\cdot j}$

$\mathrm{Im}(z) = 5\sin (3t - 4)$, dus bij $z = 5\, e^{(3t-4)\cdot j}$ hoort een spanning $u(t) = 5 \sin (3t - 4)$.

3 Geef een complex getal bij een spanning $u(t)$ met $u_{max} = 30$ V, $\omega = 50$ rad/s en $\alpha_u = \frac{1}{4}\pi$ rad.

4 Noem u_{max} , ω en φ_u van de spanning die past bij $z = 80\, e^{(0{,}70 + 40t)\cdot j}$

5 Voor een stroom $i(t)$ geldt: $i(t) = 8 \sin (100\, t + \frac{1}{3}\pi)$
Bedenk een complex getal dat bij $i(t)$ past.

Bij een complex getal $r \cdot e^{(at+b)\cdot j}$ past zowel een spanning $u(t)$ als een stroom $i(t)$.
Er geldt:

$\text{Im}(z) = u(t)$ of $\text{Im}(z) = i(t)$

r komt overeen met u_{max} of i_{max}
a komt overeen met ω
b komt overeen met φ_u of φ_i

Bij $u(t) = u_{max} \sin(\omega t + \varphi_u)$ past: $z_u = u_{max}\, e^{(\omega t + \varphi_u)\cdot j}$
Bij $i(t) = i_{max} \sin(\omega t + \varphi_i)$ past: $z_i = i_{max}\, e^{(\omega t + \varphi_i)\cdot j}$

Bij een spanning $u(t) = u_{max} \sin(\omega t + \varphi_u)$ hoort een complex getal $z_u = u_{max}\, e^{(\omega t + \varphi_u)\cdot j}$
Voor verdere bewerkingen is het handig om dit complexe getal te splitsen in een constante en een functie van t:

$$z_u = u_{max}\, e^{(\omega t + \varphi_u)j} = u_{max}\, e^{\varphi_u j} \cdot e^{\omega t \cdot j}$$

Het deel $u_{max}\, e^{\varphi_u j}$ is onafhankelijk van t en dus een constante. We noemen deze (complexe) constante U. We kunnen nu schrijven: $z_u = U \cdot e^{j\omega \cdot t}$
Op dezelfde manier kun je bij een stroom $i(t) = i_{max} \sin(\omega t + \varphi_i)$ een complex getal $z_i = I \cdot e^{j\omega \cdot t}$ bedenken

6 I is in bovenstaande formule een complexe constante waarin i_{max} en φ_i voorkomen.
Geef de formule voor I.

7 Gegeven zijn $u(t) = 5 \sin(10t + 3)$ en $i(t) = 0{,}70 \sin(10t - 2)$
a Geef z_u en z_i.
b Geef U, I en ω.

8 Gegeven zijn $U = 10 \cdot e^{0{,}3j}$, $I = 0{,}80 \cdot e^{0{,}2j}$ en $\omega = 150$.
a Geef z_u en z_i.
b Geef $u(t)$ en $i(t)$.

In een elektrische schakeling komen de hoekfrequenties van $u(t)$ en $i(t)$ altijd met elkaar overeen. Deze overeenkomst is terug te vinden in het deel $e^{\omega j \cdot t}$ van z_u en z_i.
De verschillen tussen $u(t)$ en $i(t)$ zitten in de amplitudes u_{max} en i_{max} en in de beginfasehoeken φ_u en φ_i. Deze zijn terug te vinden in de complexe getallen U en I.

Bij $u(t) = u_{max} .\sin(\omega t + \varphi_u)$ hoort een complexe spanning: $U = u_{max} e^{\varphi_u \mathrm{j}}$
Bij $i(t) = i_{max} .\sin(\omega t + \varphi_i)$ hoort een complexe stroom: $I = i_{max} e^{\varphi_i \mathrm{j}}$

Merk op: $r(U) = u_{max}$ en $\varphi(U) = \varphi_u$.
$r(I) = i_{max}$ en $\varphi(I) = \varphi_i$.

6.3 Het verband tussen *U* en *I*.

Bij de spanning $u(t)$ en de stroom $i(t)$ is de tijd t de variabele. Ook bij de complexe getallen z_u en z_i is dit het geval. $u(t)$, $i(t)$, z_u en z_i zijn grootheden uit het zogenaamde **tijdsdomein**.
In de vorige paragraaf hebben we kennis gemaakt met de complexe spanning U en de complexe stroom I. Deze zijn onafhankelijk van de tijd. U en I zijn grootheden uit het **complexe domein**.

In deze paragraaf gaan we op zoek naar verbanden tussen U en I in het complexe domein. We gaan hierbij uit van bekende formules voor $u(t)$ en $i(t)$ in het tijdsdomein. Via de complexe getallen z_u en z_i vertalen we deze verbanden voor $u(t)$ en $i(t)$ naar verbanden tussen U en I in het complexe domein.

Je mag gebruik maken van de volgende regels:

1) Een verband tussen $u(t)$ en $i(t)$ geldt ook voor z_u en z_i,
immers $u(t) = \mathrm{Im}\ (z_u)$ en $i(t) = \mathrm{Im}(z_i)$.

2) Afgeleiden van $u(t)$ of $i(t)$ worden bij berekeningen met complexe getallen vervangen door afgeleiden van z_u of z_i.

In deze paragraaf hebben we ook de afgeleiden van z_u en z_i nodig. Je kunt complexe functies op dezelfde manier differentiëren als gewone functies.

Ohmse weerstanden
Voor een Ohmse weerstand geldt de wet van Ohm:

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

Met complexe getallen wordt dit:

$$\mathrm{Im}(z_u) = R \cdot \mathrm{Im}(z_i), \text{ dus ook } z_u = R \cdot z_i$$

$$z_u = U \cdot e^{\omega j \cdot t} \text{ en } z_i = I \cdot e^{\omega j \cdot t}.$$

Hiermee vinden we:

$$U \cdot e^{\omega j \cdot t} = R \cdot I \cdot e^{\omega j \cdot t}$$

Dit klopt voor iedere t als geldt:

$$U = R \cdot I \quad \text{of} \quad \frac{U}{I} = R$$

Ideale spoelen
Voor een ideale spoel (een spoel waarbij je de ohmse weerstand van het koperdraad mag verwaarlozen) geldt: $u(t) = L \cdot i'(t)$. Met complexe getallen wordt dit:

$$U \cdot e^{\omega j \cdot t} = L \cdot [I \cdot e^{\omega j \cdot t}]'$$

$U \cdot e^{\omega j \cdot t} = L \cdot (I \cdot \omega j \cdot e^{\omega j \cdot t})$ (ωj is afkomstig van de kettingregel!)

$$U \cdot e^{\omega j \cdot t} = j\omega L \cdot I \cdot e^{\omega j \cdot t}.$$

Dit klopt voor iedere t als geldt:

$$U = j\omega L \cdot I \quad \text{of} \quad \frac{U}{I} = j\omega L.$$

Ideale condensatoren
Voor een ideale condensator (een condensator waarvan je de ohmse weerstand mag verwaarlozen) geldt: $i(t) = C \cdot u'(t)$
Je kunt aantonen dat hieruit volgt:

$$U = \frac{1}{j\omega C} \cdot I \quad \text{ofwel} \quad \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

9 Leid het complexe verband tussen U en I bij een condensator af. Ga hierbij uit van het verband tussen $i(t)$ en $u'(t)$ en volg verder de stappen zoals die bij de spoel gezet zijn.

De complexe verhouding $\frac{U}{I}$ wordt **impedantie** (Z) genoemd.
In het complexe domein kun je de wet van Ohm schrijven in de vorm $\boxed{U = Z \cdot I}$

In het bovenstaande is afgeleid hoe je de impedanties van ohmse weerstanden, ideale spoelen en condensatoren kunt berekenen. Er gelden de volgende formules:

Weerstand: $\boxed{Z_R = R}$

Spoel: $\boxed{Z_L = j\omega L}$

Condensator: $\boxed{Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}}$ Dit kun je ook schrijven als: $Z_C = \dfrac{-1}{\omega C} \cdot j$

In de formules voor Z_L en Z_C komt ω voor. Dit betekent dat de impedanties van spoelen en condensatoren afhangen van de (hoek)frequentie van de wisselspanning (stroom).
In het complexe domein is ω daarom de variabele, zoals t dat is in het tijdsdomein.

Voorbeeld.
Bepaal de impedantie van een ideale spoel met L = 0,200 H als deze is aangesloten op een wisselspanning $u(t) = 20 \sin(10t + 3)$.

Oplossing: ω = 10 rad/s, dus $Z_L = j\omega L = j \cdot 10 \cdot 0{,}200 = 2j\ \Omega$

10 Toon aan dat je $\frac{1}{j\omega C}$ ook kunt schrijven als $\frac{-1}{\omega C} \cdot j$

11 Bereken de impedantie van een ideale condensator met C = 2,0 μF als deze is aangesloten op een wisselspanning $u(t) = \sin 1000t$.

6.4 Impedanties van schakelingen

Net zoals voor weerstanden, spoelen en condensatoren kun je voor iedere willekeurige schakeling het verband tussen U en I schrijven in de vorm: $U = Z \cdot I$
Hierin is U de spanning over de hele schakeling, I de (hoofd)stroom door de schakeling en Z de impedantie van de schakeling.

Voor serieschakelingen en parallelschakelingen van impedanties gelden in het complexe domein dezelfde rekenregels als voor gewone weerstanden in het tijdsdomein.

Zo kun je vervangingsimpedanties berekenen van serie-en parallelschakelingen.

Hieronder zullen we de impedantie bepalen van enkele eenvoudige schakelingen.

Reële spoel.
Ideale spoelen hebben geen ohmse weerstand. Omdat reële spoelen gemaakt zijn van metaaldraad, hebben deze wel een zekere ohmse weerstand. Je mag een echte spoel beschouwen als een serieschakeling van een ideale spoel en een kleine ohmse weerstand.

Een **reële spoel** is te beschouwen als een serieschakeling van een ideale spoel L en een ohmse weerstand R. Bij een serieschakeling mag je de afzonderlijke impedanties optellen.

Voor deze RL-serieschakeling geldt: $\boxed{Z = R + \mathrm{j}\omega L}$

Voor de grootte van Z geldt: $\boxed{|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

12 Bepaal de impedantie van een echte spoel met L = 150 mH en een ohmse weerstand van 1,0 Ω als deze wordt aangesloten op een spanningsbron $u(t) = 2 \sin 100t$.
Bereken ook $|Z|$.

Uit de laatste formule van het grijze vlak blijkt dat $|Z|$ steeds groter wordt als ω toeneemt. Voor een zeer grote hoekfrequentie nadert de impedantie tot een oneindig groot getal. De spoel laat dan geen stroom meer door.

Reële condensator.
Ook een reële condensator heeft een soort ohmse weerstand. Een echte condensator mag je opvatten als een parallelschakeling van een ideale condensator een zeer grote ohmse weerstand.
Voor een RC-parallelschakeling geldt:

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{R}+\frac{1}{\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{R}+j\omega C$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{R}+\frac{j\omega C\cdot R}{R}=\frac{1+j\omega RC}{R}$$

$$Z=\frac{R}{1+j\omega RC}$$

Een **reële condensator** is op te vatten als een parallelschakeling van een ideale condensator en een ohmse weerstand.
Uit het bovenstaande volgt dat de impedantie van een reële condensator gelijk is aan:

$$\boxed{Z=\frac{R}{1+j\omega RC}} \quad \text{met} \quad \boxed{|Z|=\frac{R}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}}$$

Opmerking:
In het vervolg worden met spoelen en condensatoren steeds de *ideale* elementen bedoeld.

13 Bepaal de impedantie van een reële condensator met C = 2 μF en R = 1,0 MΩ als $u(t)$ = 10 sin 1000t.

14 a Leg aan de hand van de formules uit het grijze vlak uit voor welke waarde van ω een reële condensator zich gedraagt als een zuivere weerstand.
b Is er een waarde van ω waarvoor een echte condensator zich gedraagt als een ideale condensator?

Uit de laatste formule van het grijze vlak blijkt dat |Z| steeds kleiner wordt als ω toeneemt. Voor een zeer grote hoekfrequentie nadert de impedantie tot een nul. De condensator gedraagt zich dan als een kortsluitdraadje.

De RCL-serieschakeling

Voor een RCL-serieschakeling geldt:

$Z_{RCL} = Z_R + Z_C + Z_L$

Hieruit volgt:

$\boxed{Z_{RCL} = R + \dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L}$ of $\boxed{Z_{RCL} = R + j \cdot (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})}$

15 Laat zien hoe de tweede formule voor Z_{RCL} volgt uit de eerste.

16 Bepaal de impedantie van een *RCL*-serieschakeling met $R = 10\ \Omega$, L = 0,2 *H* en C = 0,0002 F als deze wordt aangesloten op een spanningsbron met $u_B(t) = \sin 100t$

17 Bekijk de formule voor de impedantie van een *RCL*-serieschakeling.
- **a** Geef een formule voor de *grootte* van de impedantie.
- **b** Wat gebeurt er met de impedantie bij hele lage waarden van ω?
- **c** Idem bij hele hoge waarden van ω.
- **d** Een *RCL*-serieschakeling kan gebruikt worden als een filter. Dit filter laat zowel hele hoge als hele lage tonen niet door. Verklaar dit.

6.5 De complexe rekenwijze

In de vorige paragrafen heb je gereedschap verzameld om berekeningen te kunnen maken in schakelingen met spoelen, condensatoren en weerstanden. Je hebt geleerd dat bij iedere formule voor een sinusvormige spanning of stroom een complex getal (z_u of z_i) te bedenken is dat dezelfde informatie bevat (maximale waarde, beginfasehoek en hoekfrequentie).
Verder heb je gezien dat van dat complexe getal een complexe spanning U of stroom I af te leiden is. U en I bevatten de informatie over de maximale waarde en de beginfasehoek.
De informatie over de hoekfrequentie ω zit verstopt in de formule voor de impedantie.
De rekenmethode die in deze paragraaf wordt besproken staat bekend als de *complexe rekenwijze.*

De complexe rekenwijze bestaat uit de volgende stappen:

Stap 1. Vertaal de gegevens van het tijdsdomein naar het complexe domein
Dit houdt in:
- bepaal de complexe spanning *U* of complexe stroom *I*
- bepaal de impedanties van weerstanden, spoelen en condensatoren

Stap 2. Bereken in het complexe domein de gevraagde spanningen of stromen. Maak hierbij indien nodig gebruik van vervangingsimpedanties,

Stap 3. Vertaal de berekende spanningen en stromen terug van het complexe domein naar het tijdsdomein.

Het meeste werk zit in stap 2. Wat je daar precies moet doen hangt af van de soort opgave. Hieronder bekijken we als voorbeeld de *RCL*-serieschakeling. Voor de liefhebbers staat er in appendix 1 nog een voorbeeld, over een iets gecompliceerdere schakeling**.**

Voorbeeld
In een *RCL*- serieschakeling is $R = 20\ \Omega$, $L = 0{,}002$ H en $C = 0{,}0001$ F.
De bron levert een spanning $u(t) = 10 \sin(1000t + \frac{1}{3}\pi)$. Gevraagd de stroom $i(t)$.

Stap 1
$u_{\text{max}} = 10 = r(U)$ en $\varphi_{\text{u}} = \frac{1}{3}\pi = \varphi(U)$, dus $U = 10e^{\frac{1}{3}\pi j}$.

$\omega = 1000$ rad/s, dus $Z_{\text{L}} = j\omega L = 2j$ en $Z_{\text{C}} = \dfrac{-1}{\omega C} \cdot j = -10j$. Verder is $Z_{\text{R}} = R = 20\ \Omega$;

Stap 2
In het complexe domein wordt *I* gevraagd. Je moet dus $r(I)$ en $\varphi(I)$ berekenen.

Uit de wet van Ohm volgt: $I = \dfrac{U}{Z_{tot}}$.

$$r(I) = \frac{r(U)}{r(Z_{tot})} = \frac{10}{r(Z_{tot})} \quad \text{en}$$

$$\varphi(I) = \varphi(U) - \varphi(Z_{\text{tot}}) = \tfrac{1}{3}\pi - \varphi(Z_{\text{tot}})$$

De onbekenden zijn nog $r(Z_{\text{tot}})$ en $\varphi(Z_{\text{tot}})$. Daarom berekenen we eerst Z_{tot}.

$$Z_{\text{tot}} = Z_{\text{R}} + Z_{\text{L}} + Z_{\text{C}} = 20 + 2j - 10j = 20 - 8j.$$

$$r(Z_{\text{tot}}) = \sqrt{20^2 + 8^2} = 21{,}5 \quad \text{en}$$

$$\varphi(Z_{\text{tot}}) = \text{invtan}\tfrac{-8}{20} = -0{,}42$$

Nu alle getallen bekend zijn berekenen we I:

$$r(I) = \frac{r(U)}{r(Z_{tot})} = \frac{10}{21{,}5} = 0{,}47 \qquad \text{en}$$

$$\varphi(I) = \varphi(U) - \varphi(Z_{\text{tot}}) = \tfrac{1}{3}\pi - -0{,}42 = 1{,}47$$

$$I = 0{,}47\ \mathrm{e}^{1{,}47 \cdot \mathrm{j}}$$

Stap 3
We vertalen de complexe stroom I terug naar de reële stroom $i(t)$.
ω blijft gewoon 1000 rad/s (de spanning en de stroom hebben gelijke hoekfrequentie).
Dit levert: $i(t) = 0{,}47 \sin(1000t + 1{,}47)$.

18 Een RCL-serieschakeling bestaat uit een weerstand van 1Ω, een condensator van 50 mF en een spoel van 300 mH.
Bereken de stroom $i(t)$ als het geheel is aangesloten op een spanningsbron met $u(t) = 2 \sin(10t + \frac{1}{3}\pi)$.

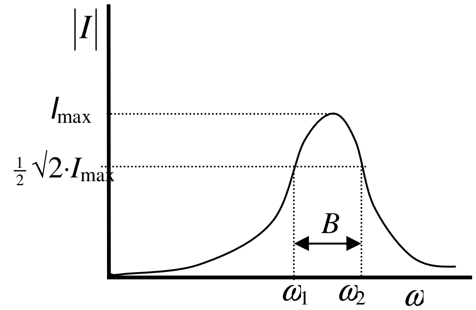
6.6 De RCL- schakeling als filter

Onder een **filter** verstaan we een schakeling die signalen met bepaalde frequenties wel doorlaat en signalen met andere frequenties niet, als je de schakeling aansluit op een spanningsbron met variabele frequentie (bijvoorbeeld een toongenerator, of een antenne die radiogolven opvangt)

In werkelijkheid ligt de zaak genuanceerder. Sommige frequenties worden vrij slecht doorgelaten (de stroomsterkte in de schakeling is dan bijvoorbeeld heel klein) en andere frequenties worden juist heel goed doorgelaten (bij die frequenties is de stroomsterkte in de schakeling relatief groot)

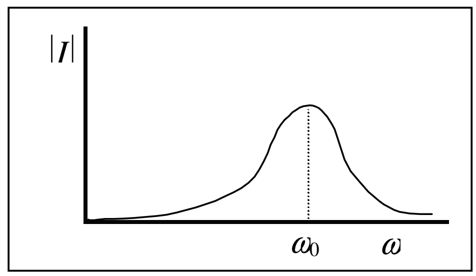
Het gebied waarin de frequenties liggen die goed worden doorgelaten noemt men de **bandbreedte *B***.
Hoe smaller de bandbreedte, des te selectiever werkt het filter.

In de figuur hiernaast is het verband tussen $|I|$ en ω bij een bepaalde schakeling getekend. Uit de figuur blijkt dat hoge en lage frequenties nauwelijks worden doorgelaten. Tussen de waarden ω_1 en ω_2 is de stroomsterkte relatief groot. Dit gebied heet de bandbreedte *B*.
De bandbreedte *B* is gelijk aan $\omega_2 - \omega_1$.
De grensfrequenties ω_1 en ω_2 worden *kantelpunten* genoemd.
De kantelpunten zijn zo gekozen, dat bij de frequenties ω_1 en ω_2 de stroomsterkte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ maal de maximale stroomsterkte is. In de geluidstechniek betekent dit een afname van de geluidsintensiteit met een factor 2 of een afname van de geluidssterkte met 3 dB. Kantelpunten worden daarom ook wel −3 dB-punten genoemd.



(Merk op dat ook buiten de officiële bandbreedte nog stroom wordt doorgelaten. Bij goede filters loopt de piek veel steiler dan in de tekening hierboven. Daarom is het frequentiegebied buiten de bandbreedte waarbij nog merkbaar stroom wordt doorgelaten erg klein.)

Zoals je in opgave 17d hebt gezien, functioneert een *RCL*-serieschakeling als een filter. In het plaatje hiernaast zie je het verloop van de stroom in de schakeling als functie van ω. Doordat de impedantie zowel bij kleine als bij grote waarden van ω heel groot wordt, wordt er bij die waarden van ω (bijna) geen stroom doorgelaten. De grafiek heeft een topwaarde bij één bepaalde hoekfrequentie, genaamd de **resonantiefrequentie** ω_0.



In appendix 2 bij dit hoofdstuk kun je zelf afleiden dat geldt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Bij de resonantiefrequentie is er in de schakeling iets bijzonders aan de hand. Je kunt uitrekenen dat de spanning over de spoel en de condensator bij deze frequentie aan elkaar gelijk zijn en dat deze spanning vele malen groter kan zijn dan de spanning die de spanningsbron levert. De schakeling treedt dus niet alleen op als een filter, maar ook als een versterker, waarbij juist die frequentie versterkt wordt die je wilt doorlaten!
De verhouding tussen de maximale spanning over de spoel (of de condensator) en de bronspanning heet de *kwaliteit* Q_0 van de schakeling. Het is mogelijk om met dit soort schakelingen een kwaliteit van meer dan 200 te bereiken. De spanning over de spoel is dan meer dan 200 keer zo groot als de spanning van de bron!

19* **In deze opgave komt het eerste deel van de onderzoeksvraag (het doorrekenen) aan de orde.** Als voorbeeld nemen we een *RCL*-serieschakeling die wordt aangesloten op een variabele spanningsbron $u(t) = 2 \sin \omega t$. De schakeling bevat een condensator van 20 pF en een weerstand van 25 Ω.

Je wilt deze schakeling gebruiken als een filter met een resonantiefrequentie van 50 Hz .

a Welke waarde moet de zelfinductiecoëfficiënt L van de spoel dan hebben?

b Bereken de formule voor stroom die wordt doorgelaten bij de resonantiefrequentie.

c Toon aan dat de spanningen over de spoel en de condensator in dat geval even groot zijn. Zijn ze ook *gelijk*?

d Bereken de kwaliteit Q_0 van de schakeling.

20* Dezelfde schakeling (dus met de spoel uit vraag 19a) laat bij andere frequenties veel minder stroom door. Neem bijvoorbeeld een frequentie van 200 Hz en ga na hoe groot de stroomsterkte in dat geval is, hoe groot de spanningen over de spoel en de condensator dan zijn en wat de maximale kwaliteit is die je met de schakeling dan nog kunt bereiken.

21* **Deze opgave gaat over het tweede deel van de onderzoeksvraag**.
Voer deze opdracht uit bij natuurkunde.

Bouw een *RCL*-serieschakeling en bepaal de resonantiefrequentie en de kwaliteit.
Meet de spanningen en/of stromen bijvoorbeeld met IP-Coach. Je kunt dan de frequentie uit de grafiek aflezen. Neem als spanningsbron een toongenerator. Je kunt daarmee de frequentie van de bronspanning instellen.

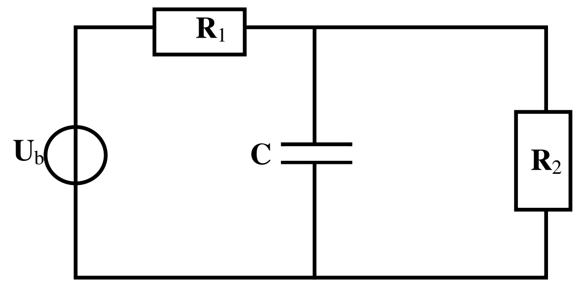
Je kunt deze vraag net zoveel uitbreiden als je zelf wilt.
Een aantal mogelijkheden:

- Kies een lampje als weerstand. De weerstand is niet ohms, dus je kunt eerst een u - i diagram maken, waaruit je de weerstand als functie van de spanning erover kunt aflezen.
- Van condensatoren is de capaciteit meestal wel bekend, maar als je de spoel zelf maakt door koperdraad om een weekijzeren kern te winden, weet je L niet. Je kunt deze dan bepalen uit de resonantiefrequentie.
- Vergelijk je meetwaarden met berekende waarden en ga na hoe nauwkeurig je gemeten hebt. Verklaar de afwijkingen.
- Ga na in welk frequentie gebied het filter nog merkbaar stroom doorlaat. Definieer eerst wat je nog "merkbaar" vindt. In de praktijk worden als doorlaatgrenzen (de zogenaamde kantelpunten) de frequenties genomen waarbij de gemeten stroomsterkte gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ maal de maximale stroomsterkte.
- Je kunt ook proberen om een filter te ontwerpen dat frequenties doorlaat binnen een bepaald gebied. Bekijk voor extra informatie de laatste paragraaf (toegift)

* Omdat dit onderzoeksvragen zijn, staan de antwoorden niet vermeld in de leerlingenversie. Van opgave 21 staan de antwoorden in de docentenversie.

Appendix 1. Meer over de complexe rekenwijze.

Deze appendix is bedoeld als toegift. Aan de hand van een extra voorbeeld wordt de complexe rekenwijze toegelicht in een parallelschakeling.



Voorbeeld
Bereken de stroom $i(t)$ door de spanningsbron in de schakeling hiernaast.

$R_1 = R_2 = 10\ \Omega$, $C = 0{,}10$ mF
$u_b(t) = 100 \sin 1000t$

Stap 1
$r(U) = 100$; $\varphi(U) = 0$, dus $U = 100 \cdot e^{0j}$

$\omega = 1000$, dus $Z_C = \dfrac{-1}{1000 \cdot 0{,}01}\,\mathrm{j} = -10\mathrm{j}$

Verder is $Z_R = R = 10\ \Omega$.

Stap 2
Gevraagd is I_{bron}.

Uit de wet van Ohm volgt: $I_{bron} = \dfrac{U}{Z_{tot}}$.

$$r(I) = \frac{r(U)}{r(Z_{tot})} = \frac{100}{r(Z_{tot})} \quad \text{en}$$

$$\varphi(I) = \varphi(U) - \varphi(Z_{tot}) = 0 - \varphi(Z_{tot})$$

Onbekend zijn weer $r(Z_{tot})$ en $\varphi(Z_{tot})$. Je moet nu eerst Z_{tot} berekenen.

$$Z_{tot} = R + Z_{par}$$

Z_{par} volgt uit: $\dfrac{1}{Z_{PAR}} = \dfrac{1}{Z_R} + \dfrac{1}{Z_C} = [\text{zie opgave 22a}] = \dfrac{1-\mathrm{j}}{-10\mathrm{j}}$

$$Z_{tot} = 10 + \frac{-10\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} = [\text{zie opgave 22b}] = \frac{10-20\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}$$

$$r(Z_{tot}) = \frac{\sqrt{10^2+20^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = 15{,}8 \quad \text{en}$$

$$\varphi(Z_{tot}) = \varphi(10-20\mathrm{j}) - \varphi(1-\mathrm{j}) = [\text{zie opgave 22c}] = -0{,}32$$

Nu deze gegevens bekend zijn, kun je I berekenen:

$$r(I) = \frac{r(U)}{r(Z_{tot})} = \frac{100}{15{,}8} = 6{,}3 \quad \text{en}$$

$$\varphi(I) = \varphi(U) - \varphi(\mathrm{Z_{tot}}) = 0 - -0{,}32 = 0{,}32$$

$$I = 6{,}3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}32 \cdot \mathrm{j}}$$

Stap 3
Uit $I = 6{,}3\ \mathrm{e}^{0{,}32\mathrm{j}}$ volgt $i(t) = 6{,}3 \sin(1000t + 0{,}32)$

22 In het voorbeeld hierboven zijn enkele tussenstappen in de berekening overgeslagen.
- **a** Geef de berekening die moet staan op de plaats van [zie opgave 22a].
- **b** Geef de berekening die moet staan op de plaats van [zie opgave 22b].
- **c** Geef de berekening die moet staan op de plaats van [zie opgave 22c].

23 Deze opgave gaat over de schakeling van voorbeeld 2.
- **a** Bepaal de complexe spanning over de weerstand R_1.
- **b** De complexe spanning over de parallelschakeling (R_2 en C) is $U_{par.}$
  Er geldt: $U_{par} = U_{bron} - U_{R1} = 40 - 20\mathrm{j}$.
  Toon dit aan en bepaal vervolgens $r(U_{par})$ en $\varphi(U_{par})$.
- **c** Bereken de stromen door R_2 en C.

Appendix 2: Enkele bijzonderheden van de *RCL*-serieschakeling

Als je meer wilt weten van de filterwerking van een *RCL*-serieschakeling, kun je deze paragraaf doornemen. Enkele bijzonderheden die je in de vorige paragraaf bent tegengekomen worden hierin verklaard.

1 Afleiding van de formule voor de resonantiefrequentie.

In paragraaf 6.6 is zonder bewijs vermeld dat de resonantiefrequentie ω_0 alleen afhangt van L en C, volgens de formule:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Waar komt deze formule vandaan?
De resonantiefrequentie is de frequentie waarbij de stroom in de schakeling maximaal is.
In een *RCL*-serieschakeling geldt voor de complexe stroom I:

$$I = \frac{U_{bron}}{Z_{totaal}} = \frac{U_{bron}}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{U_{bron}}{R + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})}$$

De grootte van de stroomsterkte is $|I|$. Er geldt:

$$|I| = \frac{|U_{bron}|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}}$$

$|U_{bron}|$ is een getal dat niet afhangt van ω. De grootte van $|I|$ wordt bij een gegeven U_{bron}, R, C, en L dus bepaald door het gedrag van de noemer in deze breuk. Als deze noemer zelf minimaal is, is de uitkomst van de breuk, dus $|I|$, maximaal.

24 **a** Leg uit dat de noemer minimaal is als $(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2$ gelijk is aan 0.

b Leid hieruit de formule voor ω_0 af.

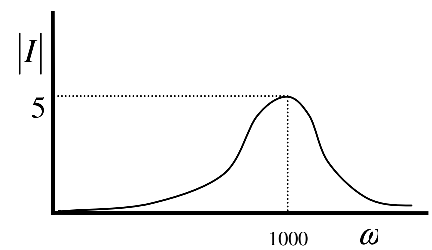
c Geef de formule voor $i(t)$ als ω gelijk is aan ω_0.

De benaming *resonantiefrequentie* verdient enige toelichting.
Men spreekt van resonantie als een systeem op een trilling met een bepaalde frequentie zo heftig reageert, dat de amplitude waarmee het systeem gaat trillen vele malen groter is dan de amplitude van de trilling die het verschijnsel veroorzaakt.
Iedereen kent de schommel, die met zeer grote uitwijking kan slingeren door er in het juiste ritme kleine duwtjes tegen te geven. Het slingeren wordt veroorzaakt door de kleine duwtjes. Het gevolg is het slingeren van de schommel met een zeer grote uitwijking. Als je de duwtjes tegen de schommel echter in een verkeerd ritme geeft, gebeurt er niets bijzonders.

Je kunt de wisselstroom in een *RCL*-schakeling beschouwen als de reactie van het *RCL*-systeem op de aangelegde wisselspanning.

25 Bij welke van de volgende aangelegde spanningen zal zich een resonantieverschijnsel voordoen in de schakeling die hoort bij het I-ω diagram hiernaast.

a $u(t) = 1000 \sin t + 5$
b $u(t) = \sin 1000t + 5$
c $u(t) = \sin (5t + 1000)$
d $u(t) = 5\sin t + 1000$



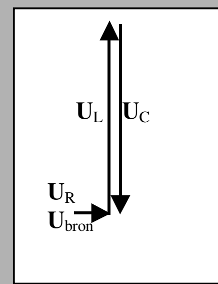
Verklaring van het resonantieverschijnsel

Bij een *RCL*-serieschakeling kunnen bij de resonantiefrequentie ω_0 spanningen optreden die vele malen groter zijn dan de aangelegde spanning. De verklaring is als volgt.

In een serieschakeling is de stroom in alle elementen gelijk. Neem even aan dat I een reëel getal is ($\varphi_1 = 0$). Als je de spanningen in het Gauss-vlak zou tekenen is de spanning over de weerstand een pijl naar rechts ($U_R = RI$ is ook reëel). De spanning over de spoel $U_L = \omega LI \cdot \mathrm{j}$ is een imaginair getal (een positief aantal maal j), dus een pijl naar boven. De spanning over de condensator $U_C = -\dfrac{1}{\omega C} I \cdot \mathrm{j}$ is ook een imaginair getal (een negatief aantal malen j) en dus een pijl naar beneden. De som van deze spanningen is gelijk aan de bronspanning.
In het Gauss-vlak kan de bronspanning worden voorgesteld door de som van een pijl naar rechts (U_R) , een pijl naar boven (U_L) een een pijl naar beneden (U_C). Hierboven heb je al gezien dat bij de resonantiefrequentie U_L en U_C qua grootte aan elkaar gelijk zijn.

Door Z_L groot te maken ten opzichte van R, kan U_L bij de resonantiefrequentie vele malen groter worden dan de aangelegde spanning U_{bron}. Bij een geschikte keuze van R, C en L kan de spanning over de spoel bij resonantie wel 100 tot 200 maal zo groot worden als de aangelegd bronspanning. De *RCL*-serieschakeling werkt dan niet alleen als een filter, maar ook nog eens als een versterker (van de doorgelaten frequentie!)

In een *RCL*-serieschakeling kunnen bij de resonantiefrequentie ω_0 spanningen voorkomen die vele malen groter zijn dan de aangelegde bronspanning.



De verhouding $\dfrac{|U_L|}{|U_{bron}|}$ (bij $\omega = \omega_0$) noemt men de kwaliteit Q_0.

Je kunt deze kwaliteit berekenen met de formule:

$\boxed{Q_0 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$ of met de formule $\boxed{Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R}}$

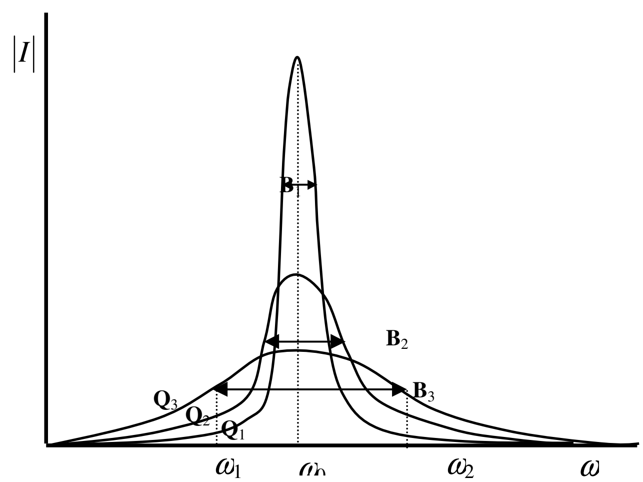
Q_0 is de versterkingsfactor bij de resonantiefrequentie.
Praktijkwaarden van Q_0 liggen in de buurt van 100 à 200.

26 **a** Leid uit de de bovenste formule uit het grijze vlak af: $Q_0 = \dfrac{Z_L}{Z_R}$.

b Toon aan dat uit opgave a volgt: $Q_0 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

De kwaliteit van een *RCL*-serieschakeling en de bandbreedte *B* zijn van elkaar afhankelijk. Hoe hoger de kwaliteit, des te kleiner wordt de bandbreedte. Naarmate een *RCL*-serieschakeling beter versterkt, wordt hij dus ook als filter selectiever.
Een en ander is in de figuur hiernaast goed te zien. Er geldt:

$Q_1 > Q_2 > Q_3$ en $B_1 < B_2 < B_3$



3 Andere formules

Voor de bandbreedte geldt een eenvoudige formule: $B = \dfrac{R}{L}$.
De afleiding van deze formule valt buiten het bestek van deze module.
Deze formule laat zien dat de bandbreedte uitsluitend afhangt van *R* en *L*.
Blijkbaar heeft de waarde van *C* geen invloed op de bandbreedte

Uit $Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R}$ volgt: $Q_0 = \dfrac{\omega_0}{R/L} = \dfrac{\omega_0}{B}$

Dit kun je ook schrijven als: $B = \dfrac{\omega_0}{Q}$

Uit deze laatste formule blijkt dat de bandbreedte twee keer zo klein wordt als de kwaliteit twee keer zo groot wordt.

Bij schakelingen met een lage kwaliteit ligt de resonantiefrequentie ω_0 niet midden tussen de kantelpunten ω_1 en ω_2. In de figuur op de vorige bladzijde is duidelijk te zien dat bij kwaliteit Q_3 de afstand $\omega_0 - \omega_1$ kleiner is dan de afstand $\omega_2 - \omega_0$.
Bij schakelingen met een hoge kwaliteit ligt de waarde van ω_0 echter redelijk goed midden tussen de kantelpunten.
Aangezien in de praktijk alleen schakelingen met hoge kwaliteit van belang zijn, mag je er bij berekeningen van uit gaan dat ω_0 midden tussen de kantelpunten ligt. In dat geval geldt:

$$\omega_1 = \omega_0 - \tfrac{1}{2} \cdot B \text{ en } \omega_2 = \omega_0 + \tfrac{1}{2} \cdot B$$

Combinatie met de bovenstaande formule voor bandbreedte levert :

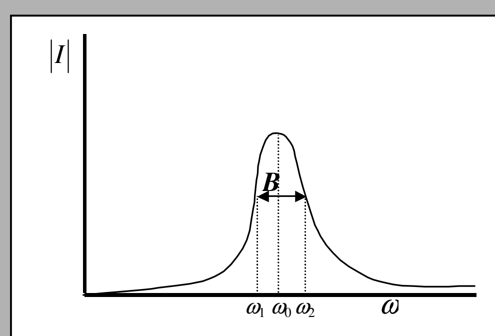
$$\omega_1 = \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2Q_0}\right) \text{ en } \omega_2 = \omega_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2Q_0}\right)$$

Deze laatste formules gelden alleen voor "hoge" kwaliteiten ($Q_0 > 20$).

27 Leid de bovenstaande formules voor ω_1 en ω_2 af uit het voorgaande.

We vatten de eigenschappen van een ***RCL*-serieschakeling** nog eens samen.
Voor de resonantiefrequentie geldt:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$



De kantelpunten zijn ω_1 en ω_2.

De bandbreedte $\boxed{B = \omega_2 - \omega_1}$

De bandbreedte hangt alleen af van R en L volgens de formule:

$$\boxed{B = \frac{R}{L}}$$

Bij kwaliteiten hoger dan 20 geldt in goede benadering:

$\boxed{\omega_1 = \omega_0 - \tfrac{1}{2}B}$ en $\boxed{\omega_2 = \omega_0 + \tfrac{1}{2}B}$

Deze formules zijn te herleiden tot:

$$\omega_1 = \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2Q_0}\right) \text{ en } \omega_2 = \omega_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2Q_0}\right)$$

De kwaliteit van de schakeling bij resonantie is Q_0. Er gelden de volgende formules:

$\boxed{Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R}}$ en $\boxed{Q_0 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

28 In een *RCL*-serieschakeling is $R = 2{,}0\ \Omega$, $L = 0{,}02$ H en $C = 1\ \mu$F.

- **a** Bepaal de resonantiefrequentie.
- **b** Bepaal de kwaliteit van de schakeling.
- **c** Bepaal de bandbreedte.
- **d** Bepaal de kantelpunten.

29 In een *RCL*-serieschakeling liggen de kantelpunten bij 7950 en 8050 rad/s.
Neem in eerste instantie aan dat de resonantiepiek symmetrisch is t.o.v. de lijn $\omega = \omega_0$.

- **a** Bepaal de waarden van L en C als $R = 8{,}0\ \Omega$.
- **b** Controleer of de aanname dat resonantiepiek symmetrisch ligt, gerechtvaardigd is.

In de praktijk rekent men liever met gewone frequenties in Hz dan met hoekfrequenties in rad/s. De volgende formules zijn handig bij het omrekenen.

$\boxed{\omega = 2\pi f}$ en $\boxed{f = \dfrac{\omega}{2\pi}}$ (ω in rad/s en f in Hz)

30 Iemand wil met een *RCL*-serieschakeling een filter ontwerpen dat alleen frequenties tussen 20.000 en 21.000 Hz "doorlaat".

- **a** Bepaal de verhouding tussen R en L die uit deze eis volgt.
- **b** Bepaal de waarde van ω_0
- **c** Bepaal hieruit het verband tussen C en L
- **d** Kies voor L = 1H. Bepaal R en C met behulp van opgave a en c.
- **e** Wat worden de waarden van L en C als R een weerstand van 1,0 Ω is?
- **f** Bepaal de kwaliteit van de schakeling.

31

- **a** Ontwerp een tweede-orde filter dat frequenties tussen 5800 en 5850 Hz doorlaat. Gebruik een weerstand van 2,0 Ω.
- **b** Bepaal de kwaliteit van de zojuist ontworpen schakeling.
- **c** Omdat de kwaliteit niet erg hoog is, ligt de resonantiefrequentie niet precies midden tussen de kantelpunten. Ga na of de "doorgelaten" frequenties van het door jou ontworpen filter hierdoor te hoog of te laag zijn.

Bronvermelding

1. Dames, R (2003), *Collegedictaat Wiskunde en Natuurkunde deel 2*, derde versie, Kon. Conservatorium, Den Haag

2. Spiegel, M (1974), *Theory and problems of complex variables*, Schaum's outline series, McGraw-Hill, Inc, London

3. Almering, J.H.J.e.a.(1977), *Analyse,* tweede druk, D.U.M. BV, Delft

4. Boyce, William and di Prima (1977), Richard, *Elemantary Differential Equations and Boundary Problems,* 3rd edition, Wiley, New York

5. Craats, Jan van der (2006), *Complexe getallen voor wiskunde D*, voorlopige versie.

6. Boon, A.W., e.a (1999), *Netwerk B1 deel 4* (VWO), 2e editie, Wolters Noordhoff, Groningen

Uitwerkingen

Hoofdstuk 1

1 **a** −1 **b** geen oplossing **c** i en −i

d $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $-i^2 = 1$; $(-i)^4 = 1$; $(-2i)^2 = -4$;
e −2i en 2i; −i√5 en i√5
f $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

2 **a** 5; 2; 5 − 2i

b −5 − 2i; −(5 − 2i) = −5 + 2i; $-\overline{5+2i} = -(5-2i) = -5+2i$

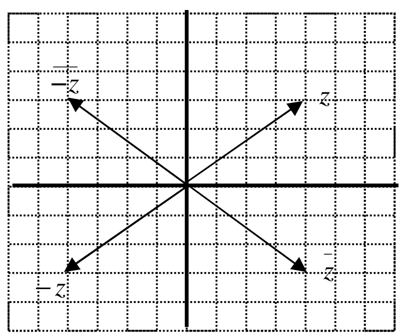
c $\overline{-(x+yi)} = \overline{-x-yi} = -x+yi = -(x-yi) = -\overline{x+yi}$. Dit geldt dus algemeen.

3 0; −2; 5 en −2i

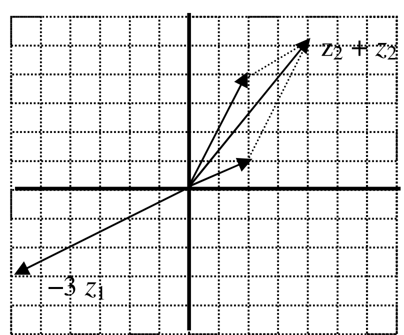
4 **a** ja, ja
b nee, $j^2 = -1$ is reëel
c ja, alle reëele getallen zijn ook complexe getallen

5 **a** punt *C*;
b punt *A*
c (0, 3) = 3j; (−2, 0) = −2; (4, 0) = 4; (0, −6) = −6j

6 **a** en **b**: zie tekening
c $-z$: puntspiegeling in *O*
$\overline{z}$: spiegeling in horizontale
$-\overline{z}$ spiegeling in verticale as.



7 **b** $z_1 + z_2 = 4 + 5i$
c Bij optellen moet je de reële delen apart optellen en de imaginaire delen ook.
d $-3z_1 = -6 - 3i$
e Bij vermenigvuldigen met een getal moet je het reële deel en het imaginaire deel allebei met dat getal vermenigvuldigen.



8 **a** 2 + j **b** 1 + j **c** −1 + 2j **d** −10 − 8j **e** −14 +5j **f** j

9 **a** $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bi \cdot di = ac + (ad + bc)i + bd \cdot i^2 =$
$ac + bd \cdot -1 + (ad + bc)i = ac - bd + (ad + bc)i$

b $6 - 17j$

10 **a** $(5 + 2i)(5 - 2i) = 25 - (4i^2) = 25 - 4 \cdot -1 = 29$

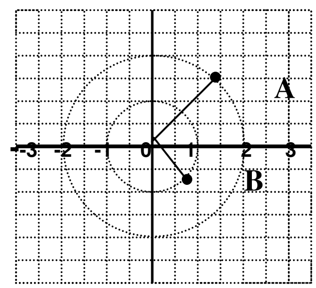
b $(c + di)(c - di) = c^2 - (di)^2 = c^2 - -d^2 = c^2 + d^2$

11 **a** $\frac{2+5i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{6+8i+15i+20i^2}{9-16i^2} = \frac{-14+23i}{25} = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i$

b $\frac{1+i}{2+4i} \cdot \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{2-4i+2i-4i^2}{4+16} = \frac{6}{20} - \frac{2}{20}i = 0{,}3 + 0{,}1i$

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

12 $\longrightarrow$



13 **a** $r = 2;\ \varphi = 0$

b $r = 3;\ \varphi = \pi$

c $r = 5;\ \varphi = \frac{1}{2}\pi$

d $r = 2\sqrt{2};\ \varphi = \frac{1}{4}\pi$

14 **a** in beide gevallen is $\tan \varphi = 1$

b $\frac{1}{4}\pi$

c verschillende punten, dus verschillende coördinaten

d P: $\varphi = \frac{1}{4}\pi$; Q: $\varphi = 1\frac{1}{4}\pi$

e $P(r = 3\sqrt{2},\ \varphi = \frac{1}{4}\pi)$, $Q(r = 3\sqrt{2},\ \varphi = 1\frac{1}{4}\pi)$

15 **a** $(2, 2\sqrt{3})$ **b** $(0{,}28\ ;\ 3{,}99)$ **c** $(-2, 0)$ **d** $(-0{,}02;\ -0{,}99)$

16 **a** $(r = 7{,}62;\ \varphi = 1{,}17)$ **b** $(r = 2{,}24;\ \varphi = 2{,}30)$

c $(r = 5{,}35;\ \varphi = 1{,}13)$ **d** $(r = 5{,}79;\ \varphi = 4{,}46)$

17 **a** $z = 4{,}47e^{0{,}46i}$

b $z = 2{,}24e^{3{,}60i}$

c $r = 4e^{\pi i}$

d $r = 2e^{\frac{1}{2}\pi i}$

18 **a** $z = -4{,}01 + 2{,}99j$ **b** $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot j$

19 **a** $256\ e^{20j}$

b $1{,}33\ e^{7j}$

c $3 + 5j = \sqrt{34}\ e^{1{,}03j}$; antwoord: $1156e^{4{,}12j}$

d $6 - 2j = \sqrt{40}\ e^{-1{,}25j}$; antwoord $36{,}9\ e^{-0{,}22j}$

e $3{,}38 \cdot 10^8\ e^{4{,}49j}$

f $0{,}92\ e^{2{,}28j}$

20 **a** $-0{,}12 - 6{,}57j$ **b** $1{,}11\ e^{3{,}66j}$

21 4; –4; 4

22 **a** $2 + 5\omega = 0$

b $\frac{-5\omega}{2\omega+4} = \frac{\omega}{4}$

c $3\omega - \frac{5}{\omega} = 0$

d voor geen enkele ω.

Hoofdstuk 2

1 **a** $z = e^{(\frac{1}{3}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi)i}$ **b** $z = 1{,}22e^{(0{,}67 + k\cdot\frac{1}{2}\pi)i}$

2 **a** 5 en –5 **c** $5e^{\frac{1}{4}\pi i}$ en $5e^{1\frac{1}{4}\pi i}$ **e** $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{25}\cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}$, $\sqrt[3]{25}\cdot e^{\frac{4}{3}\pi i}$

b 5i en –5i **d** $5e^{-\frac{1}{4}\pi i}$ en $5e^{-1\frac{1}{4}\pi i}$ **f** $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}\cdot i$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}\cdot i$

3 **a** 5 **b** - **c** - **d** - **e** $\sqrt[3]{25}$ **f** $\sqrt{5}$

4 $\sqrt[6]{2}e^{(\frac{1}{12}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi)\cdot i}$ en $\sqrt[2n]{2}\cdot e^{(\frac{1}{4n}\pi + k\cdot\frac{2}{n}\pi)\cdot i}$ immers $r^n e^{n\varphi} = \sqrt{2}\cdot e^{(\frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi)i}$,
dus $r = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{2n}}$ en φ = $\varphi = \frac{1}{n}(\frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi) = \frac{1}{4n}\pi + k\cdot\frac{2}{n}\pi$

5 **a** $z = \ln 5 + (-0{,}93 + k\cdot 2\pi)i$ **b** $z = 4{,}39 + (2{,}5 + k\cdot 2\pi)i$

6 **a** $\ln 2 + k\cdot 2\pi i$ **c** $\ln 2 + (\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi)i$

b $\ln 2 + (\pi + k\cdot 2\pi)i$ **d** $\ln 2 + (-\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi)i$

7 $z^8 - 82z^4 + 81 = (z^4 - 1)(z^4 - 81) = (z^2 + 1)(z^2 - 1)(z^2 + 9)(z^2 - 9) = 0$.
De nulpunten zijn: $z = -i$; $z = i$; $z = -1$; $z = 1$; $z = -3i$; $z = 3i$; $z = -3$ en $z = 3$.
Oplossing: $p(z) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1)(z + 3i)(z - 3i)(z + 3)(z - 3)$.
In plaats van door te ontbinden had je de nulpunten ook kunnen vinden door eerst $p^2 - 82p + 81$ op te lossen met de *abc*-formule,en vervolgens de vergelijkingen $z^4 = 1$ en $z^4 = 81$ op de manier van paragraaf 2.1 op te lossen.

8 **a** $z = -\frac{1}{2} \pm i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **f** $z = \pm i\sqrt{7}$ of $e^{(0 + k\cdot\frac{2}{3}\pi)i}$

b $z = 0$ of $z = 2 \pm \sqrt{5}$ **g** $3{,}61e^{0{,}98 + k\cdot 2\pi)i}$

c $z = -i$ of $z = 3i$ **h** $0{,}186e^{(1{,}95 + k\cdot 2\pi)i}$

d $z = e^{(0 + k\cdot\frac{2}{5}\pi)i}$ **i** $z = 4{,}31 + i\cdot(-\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi)$

e $z = 1{,}41\ e^{(-\frac{1}{12}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi)i}$ **j** $z = 0{,}69\ e^{(\frac{1}{4}\pi + k\cdot\pi)i}$

Hoofdstuk 3

1 a, b en d voldoen

2 Nee, de bewering klopt niet voor *alle* t, maar alleen voor de berekende waarden van *t*.

3 **a** $u'(t) = A \cos t - B \sin t$
$u''(t) = -A \sin t - B \cos t$; invullen levert $0 = 0$
b Voor iedere waarde van A en B heb je een andere oplossing.

4 **a** $y = C \cdot e^{-t}$
b $C = 2$

5 **a** B = 4 en A kan alles zijn
b $u'(t) = A \cos t - B \sin t$
c A = 2 en B kan alles zijn
d $u(t) = 2 \sin t + 4 \cos t$

6 **a** $y' = pC\,e^{px}$; $y'' = p^2Ce^{px}$
b Ce^{px} buiten haakjes: $Ce^{px}(2p^2 + p - 1) = 0$, dus $Ce^{px} = 0$ of $2p^2 - px - 1 = 0$
$C = 0$ is niet interessant, dus $2p^2 - p - 1 = 0$
c $p_1 = \frac{1}{2}$; $p_2 = -1$

7 **a** $y = A \cdot e^{p_1 x} + B \cdot e^{p_2 x}$, dus $y' = Ap_1 e^{p_1 x} + Bp_2 e^{p_2 x}$ en $y'' = A(p_1)^2 e^{p_1 x} + B(p_2)^2 e^{p_2 x}$,
b Invullen levert:
$a(A(p_1)^2 e^{p_1 x} + B(p_2)^2 e^{p_2 x}) + b(Ap_1 e^{p_1 x} + Bp_2 e^{p_2 x}) + c(A\ e^{p_1 x} + B\ e^{p_2 x}) = 0$
c Dit kun je herschrijven als:
$aA(p_1)^2 e^{p_1 x} + bAp_1 e^{p_1 x} + + cA e^{p_1 x} + aB(p_2)^2 e^{p_2 x} + bBp_2 e^{p_2 x} + cB e^{p_2 x} = 0$
$A e^{p_1 x}(a(p_1)^2 + bp_1 + c) + B e^{p_2 x}(a(p_2)^2 + bp_2 + c) = 0$
d Zowel $a(p_1)^2 + bp_1 + c = 0$ als $a(p_2)^2 + bp_2 + c = 0$, want p_1 en p_2 zijn de oplossingen van de karakteristieke vergelijking. Er staat dus $A e^{p_1 x} \cdot 0 + B e^{p_2 x} \cdot 0 = 0$, ofwel $0 + 0 = 0$.
En dat is altijd juist.
e Omdat p_1 en p_2 de enige oplossingen zijn van de karakteristieke vergelijking is p_3 geen oplossing van de karakteristieke vergelijkingen en dus is $y_3 = C \cdot e^{p_3 x}$ geen oplossing van de differentiaalvergelijking. Er bestaat dus niet zo'n getal p_3

8 **a** $y = \frac{40}{3} e^{-x} - \frac{10}{3} e^{-4x}$
b $y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{3x}$
c $y = \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{2x}$
d $y = x^2 + 10$

9 **a** $p^2 + 2p + 1 = 0$, dus $p = -1$
b $y' = -Ae^{-x}$; $y'' = Ae^{-x}$; invullen levert $0 = 0$, klopt voor alle x.
c $y' = Be^{-x} - Bx \cdot e^{-x}$ Invullen levert weer $0 = 0$ etc.

De antwoorden van de opgaven 10, 11 en 12 staan in de docentenhandleiding.

13 **a** $y = Ae^{-3x} + Be^{x}$
b $y = A + B\,e^{-5x}$
c $y = Ae^{-3x} + Bx\,e^{-3x}$
d $y = A \cos \sqrt{3}\, x + B \sin \sqrt{3}\, x$
e $y = e^{x}(A\cos x + B \sin x)$
f $y = e^{x}(A\cos \sqrt{5}\, x + B \sin \sqrt{5}\, x)$

14 **a** $y = 5 \cos 2x$
b $y = e^{-2x} + 3xe^{-2x}$

Hoofdstuk 4

1 **a** $f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ...$; Hieruit volgt $a_0 = f(0)$

b $f'(0) = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + ...$; Hieruit volgt: $a_1 = f'(0)$

c $f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + ... + (n-1) \cdot n \cdot x^{n-2} + ...$

$f''(0) = 2a_2 + 0 + 0$ ....., dus $a_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$

$f^{(3)}(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + ...$; $f^{(3)}(0) = 2 \cdot 3a_3 + 0 + ...$, dus $a_3 = \dfrac{f^{(3)}(0)}{3 \cdot 2}$

d a_4 volgt uit viermaal differentiëren van de term a_4x^4
eerste afgeleide: $4a_4x^3$; tweede afgeleide $3 \cdot 4a_4x^2$; derde afgeleide $2 \cdot 3 \cdot 4a_4x$ en de vierde afgeleide is $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 = 4! \cdot a_4$. Er geldt $f^{(4)}(x) = 4! \cdot a_4$ + termen met $x, x^2 ... x^n$.

$f^{(4)}(0) = 4! \cdot a_4 + 0 + 0$ ...; Hieruit volgt: $a_4 = \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}$

e Uit $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$ volgt: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

2 **a** $f'(x) = f''(x) = f^{(n)}(x) = e^x$.

b $f'(0) = f''(0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

c $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ...$

3 **a** $f'(x) = \cos x$, dus $f'(0) = \cos 0 = 1$
$f''(0) = -\sin x$, dus $f''(0) = -\sin 0 = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos x$, dus $f^{(3)}(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$, dus $f^{(4)}(0) = 0$

b $f^{(5)}(0) = f'(0) = 1$; $f^{(6)}(0) = f''(0) = 0$; $f^{(7)}(0) = f^{(3)}(0) = -1$; $f^{(8)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$

c Omdat alle even afgeleiden van $\sin x$ gelijk zijn aan 0 als je $x = 0$ invult.

d $\sin x = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 + \frac{-1}{7!}x^7 + 0 + \frac{1}{9!}x^9 =$

$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 ...$

4 **a** $x^7 = x^{2n+1}$, dus $n = 3$. Voor x^9 is $n = 4$.

b $\dfrac{(-1)^3}{(2 \cdot 3+1)!}x^{2 \cdot 3+1} = \dfrac{-1}{7!}x^7$; $\dfrac{(-1)^4}{(2 \cdot 4+1)!}x^{2 \cdot 4+1} = \dfrac{1}{9!}x^9$

c $(-1)^3 \cdot \dfrac{1}{(2 \cdot 3)!}x^{2 \cdot 3} = \dfrac{-1}{6!}x^6$ en $(-1)^4 \cdot \dfrac{1}{(2 \cdot 4)!}x^{2 \cdot 4} = \dfrac{1}{8!}x^8$

5 **a** $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$

b $(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4)' = 0 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + 3 \cdot \frac{1}{3.2}x^2 + 4 \cdot \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}x^3 =$

$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$

5 **c** Van e^x. hieruit volgt: $(e^x)' = e^x$ (Dat moet natuurlijk ook!)

d/e $(\sin x)' = (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 ..)' = 1 - 3\cdot\frac{1}{3!}x^2 + 5\cdot\frac{1}{5!}x^4 - 7\cdot\frac{1}{7!}x^6 + 9\cdot\frac{1}{9!}x^8 ..)'$

$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 ... = \cos x$

6 **a** $e^x = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... =$

$= 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ...$

Bij de vierde-ordebenadering vervallen de termen vanaf x^5 en houd je over:

$e^x \approx 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$

b $e^1 = 2{,}718281828..$; $1 + 1 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{6}\cdot 1^3 + \frac{1}{24}\cdot 1^4 = 2{,}708333.......$

c/d eerste-orde benadering: 1 + 1 = 2; verschil is 0,71828..

tweede-orde benadering: $1 + 1 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 = 2{,}5$; verschil is 0,21828...

derde-orde benadering: $1 + 1 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{6}\cdot 1^3 = 2{,}666...$; verschil is 0,0516..

Voor de vierde-ordebenadering bedraagt het verschil met de exacte waarde 0,0099..

e Ook het getal dat je rekenmachine geeft is een benadering.

De antwoorden van de opgaven 7 en 8 staan in de docentenhandleiding.

Hoofdstuk 5

1 **a** m·g = m·s"
b s(t) = $\frac{1}{2}$gt^2 + At + B
c $A = v(0)$ en $B = s(0)$

2 **a** m·u" = –C·u
b In vraag a de term *Cu* naar links halen: *mu" + Cu* = 0.
Dit is een vergelijking van de vorm *au" + bu' + cu* = 0, met *a = m; b* = 0 en *c = C*.

3 **a** m · u" = –C · u , dus 2u" + 1000u = 0 ;
b u(0) = 0,02 m en u'(0) = 0 m/s
c Karakteristieke vergelijking: 2p^2 + 1000 = 0 , dus p^2 = –500 ; p = ± √–500 = ±023,4·i
Oplossing: u(*t*) = A cos 23,4t + B sin 23,4t ;
u'(t) = –23,4 Asin 23,4 t + 23,4 B cos 23,4t
u(0) = 0,02, dus A = 0,02
u'(0) = 0, dus B = 0
Specifieke oplossing: u(t) = 0,02 cos 23,4t
d Deze oplossing beschrijft een harmonische trilling met amplitude 2 cm en een frequentie die volgt uit: 23,4 = 2πf f, dus f = 3,7 Hz.)

4* **De uitwerking van deze onderzoeksvraag staat in de docentenhandleiding**

5 **a** 0,400u" + 2,0*u'* + 100*u* = 0
b *u*(0) = 0,05 en *u'*(0) = 0
c kar. verg: 0,4*p*^{2} + 2*p* + 100 = 0; oplossing: $p = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{0,8} = -2,5 \pm 7,5i$

$u(t) = e^{-2,5t}(A\cos 7,5t + B\sin 7,5t)$
$u'(t) = -2,5e^{-2,5t}(A\cos 7,5t + B\sin 7,5t) + e^{-2,5t}(-7,5A\sin 7,5t + 7,5B\cos 7,5t)$
u(0) = 0,05, dus 1·(*A* · 1 + *B* · 0) = 0,05 → *A* = 0,05
u'(0) = 0, dus –2,5(0,05 · 1 + *B* · 0) + 1(–7,5*A* · 0 + 7,5*B* · 1) = 0
–0,125 + 7,5*B* = 0 → *B* = 0,017.
Oplossing: $u(t) = e^{-2,5t}(A\cos 7,5t + B\sin 7,5t)$
d Invoeren van $y_1 = u(t) = e^{-2,5t}(A\cos 7,5t + B\sin 7,5t)$ en y_2 = 0,0005 op de GR levert 5 snijpunten op. Het laatste snijpunt ligt bij *t* = 1,795 s. Deze trilling duurt slechts 1,8 s.

6 Differentiaalvergelijking: 0,400u" + *du'* + 100*u* = 0
Beginvoorwaarden *u*(0) = 0,05 en *u'*(0) = 0
kar. verg: 0,4*p*^{2} + d*p* + 100 = 0; oplossing: $p = \dfrac{-d \pm \sqrt{d^2 - 40}}{0,8} = \dfrac{-d \pm i\sqrt{40 - d^2}}{0,8}$

$u(t) = e^{-1,25dt}(A\cos(1,25\sqrt{40-d^2} \cdot t) + B\sin(1,25\sqrt{40-d^2} \cdot t)$
Omdat je mag benaderen, kun je factor met de sinus en de cosinus even buiten beschouwing laten. De afname van de uitwijking wordt bepaald door de e-macht. Als $e^{-1,25dt} = 0,01$, is de amplitude nog slechts 1 % van de beginamplitude. Dit moet na 10 seconden het geval zijn, dus $e^{-12.5d} = 0,01$. Dit is zo als d = ln(0,01)/–12,5 = 0,368.
Voor alle waarden van *d* kleiner dan 0, 368 zal de trilling (bij benadering) langer dan 10 s duren.

7* **De uitwerking van deze opgave staat in de docentenhandleiding.**

Hoofdstuk 6

1 **a** $z = 3\cos(20t - 5) + j \cdot 3\sin(20t - 5)$. $\text{Im}(z) = 3\sin(20t - 5)$
b $u(t) = 3\sin(20t - 5)$

2 **a** $u_{max} = 100$ V, $\omega = 10$ rad/s en $\varphi_u = 0{,}30$ rad.
b $z = 100e^{(10t + 0{,}30) \cdot j}$

3 $z = 30\, e^{(50t + 0{,}25\pi) \cdot j}$

4 $u_{max} = 80$ V, $\omega = 40$ rad/s en $\varphi_u = 0{,}70$

5 $z = 8\, e^{(100t + \pi/3) \cdot j}$

6 $I = i_{max} \cdot e^{\varphi_i \cdot j}$.

7 **a** $z_u = 5\, e^{(10t + 3) \cdot j}$ en $z_i = 0{,}70\, e^{(10t - 2) \cdot j}$.
b $U = 5\, e^{3j}$, $I = 0{,}70\, e^{-2j}$ en $\omega = 10$.

8 **a** $z_u = 10 \cdot e^{(150t + 0{,}3) \cdot j}$ en $z_i = 0{,}80 \cdot e^{(150t + 0{,}2) \cdot j}$.
b $u(t) = 10 \sin(150t + 0{,}3)$ en $i(t) = 0{,}80 \sin(150t + 0{,}2)$.

9 $i(t) = C \cdot u'(t)$, dus $I \cdot e^{\omega j \cdot t} = C \cdot [U \cdot e^{\omega j \cdot t}]'$

$I \cdot e^{\omega j \cdot t} = C \cdot (U \cdot \omega j \cdot e^{\omega j \cdot t}) = j\omega C \cdot U \cdot e^{\omega j \cdot t}$.

Dit klopt voor iedere t als geldt: $I = j\omega C \cdot U$ of $\dfrac{U}{I} = \dfrac{1}{j\omega C}$

10 $$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{j^2 \omega C} = \frac{j}{-\omega C} = \frac{-1}{\omega C} \cdot j$$

11 $\omega = 1000$, dus $\dfrac{-1}{\omega C} \cdot j = \dfrac{-1}{1000 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \cdot j = \dfrac{-1}{0{,}002} \cdot j = -500j\ \Omega$.

12 $Z = R + j\omega L = 1 + 100 \cdot 0{,}150j = 1 + 15j\ \Omega$. $|Z| = \sqrt{1^2 + 15^2} = 15{,}033\Omega$

13 $$Z = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{1 \cdot 10^6}{1 + j \cdot 1000 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = \frac{1 \cdot 10^6}{1 + 2000 \cdot j}$$

14 **a** $Z = \dfrac{R}{1 + j\omega RC}$. Als $\omega = 0$, staat hier: $Z = \dfrac{R}{1 + 0} = R$.
b Nee, door de 1 in de noemer wordt Z nooit gelijk aan $1/\omega C$.

15 $Z_{RCL} = R + \dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L = \ R - \dfrac{1}{\omega C} \cdot \mathrm{j} + \mathrm{j}\omega L = \ R + \mathrm{j} \cdot (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})$

16 $Z_{\mathrm{RCL}} = \ R + \mathrm{j} \cdot (\omega L - \dfrac{1}{\omega C}) = 10 + \mathrm{j} \cdot (100 \cdot 0{,}2 - \dfrac{1}{100 \cdot 0{,}0002}) \ = 10 - 30\mathrm{j}$

17 **a** $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}$

b Bij zeer lage waarden van ω nadert ωC tot 0 en $\dfrac{1}{\omega C}$ tot ∞. De impedantie wordt dan zeer groot.

c Bij zeer hoge waarden van ω nadert ωL tot oneindig en wordt de impedantie eveneens heel groot.

d Bij hoge en lage frequenties is de impedantie heel groot, dus de stroomsterkte heel klein.

18 $U = 2;\ \varphi_{\mathrm{u}} = \frac{2}{3}\pi$

$Z = 1 + 3\mathrm{j} - 2\mathrm{j} = 1 + \mathrm{j};\ r(Z) = \sqrt{2}$ en $\varphi(Z) = 0{,}25\pi$.

$I = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{12}\pi \cdot \mathrm{j}}$

$i(t) = 1{,}4 \sin(10t + \frac{1}{12}\pi)$

De uitwerkingen van de opgave 19 en 20 staan in de docentenhandleiding.

21 Deze opgave is een natuurkundige praktische opdracht. Er zijn geen antwoorden van.

22 **a** $\dfrac{1}{Z_{PAR}} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{-10\mathrm{j}} = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{-\mathrm{j}}{-\mathrm{j}} + \dfrac{1}{-10\mathrm{j}} = \dfrac{-\mathrm{j}}{-10\mathrm{j}} + \dfrac{1}{-10\mathrm{j}} = \dfrac{1-\mathrm{j}}{-10\mathrm{j}}$

b $Z_{\mathrm{tot}} = 10 + \dfrac{-10\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} = 10 \cdot \dfrac{1-\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} + \dfrac{-10\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} = \cdot \dfrac{10-10\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} + \dfrac{-10\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} = \dfrac{10-20\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}$

c $\varphi(Z_{\mathrm{tot}}) = \varphi(10 - 20\mathrm{j}) - \varphi(1 - \mathrm{j}) = \mathrm{invtan}\ \frac{-20}{10} - \mathrm{invtan}\ \frac{-1}{1} = -1{,}107 - -0{,}785 = -0{,}32$

23 **a** $U_{\mathrm{R1}} = Z_{\mathrm{R1}} \cdot I_1 = 10 \cdot 6{,}3\ \mathrm{e}^{0{,}32\mathrm{j}} = 63{,}3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}32\mathrm{j}}$

b $U_{\mathrm{par}} = U_{\mathrm{bron}} - U_{\mathrm{R1}} = 100\ \mathrm{e}^{0\mathrm{j}} - 63{,}3\ \mathrm{e}^{0{,}32\mathrm{j}} = 100 - 63{,}3(\cos 0{,}32 + \mathrm{j} \sin 0{,}32) =$

$= 100 - 60 - 19{,}9\ \mathrm{j} = 40 - 20\mathrm{j}$

$r(U_{\mathrm{par}}) = \sqrt{(40^2 + 20^2)} = 44{,}7;\quad \varphi(U_{\mathrm{par}}) = \mathrm{invtan}\ \frac{-20}{40} = -0{,}46$

c $I_{R2} = \dfrac{U_{par}}{Z_{R2}}\ ;\ r(I_{\mathrm{R2}}) = \dfrac{44{,}7}{10} = 4{,}47\ ;\ \varphi(I_{\mathrm{R2}}) = -0{,}46 - 0 = -0{,}46$

$I_{\mathrm{R2}} = 4{,}47\ \mathrm{e}^{-0{,}46\mathrm{j}}$, dus $\underline{i_{\mathrm{R}}(t) = 4{,}47 \sin(1000t - 0{,}46)}$

$I_C = \dfrac{U_{par}}{Z_C}\ ;\ r(I_{\mathrm{C}}) = \dfrac{44{,}7}{10} = 4{,}47\ ;\ \varphi(I_{\mathrm{R2}}) = -0{,}46 - -0{,}5\pi = 1{,}11$

$I_{\mathrm{C}} = 4{,}47\ \mathrm{e}^{1{,}11\mathrm{j}}$, dus $\underline{i_{\mathrm{C}}(t) = 4{,}47 \sin(1000t + 1{,}11)}$

24 **a** Het kleinste getal dat uit $(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2$ kan komen is 0.

Onder de wortel wordt dus 0 of meer bij R^2 opgeteld.

b $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$, dus $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$, dus $\omega = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$

c $I = \dfrac{U_{bron}}{Z} = \dfrac{U_{bron}}{R + 0j} = \dfrac{U_{bron}}{R}$;

$i_{\max} = \dfrac{u_{\max}}{R}$ en $\varphi_i = \varphi_u - \varphi_R = 0 - 0 = 0$;

$i(t) = \dfrac{u_{\max}}{R} \sin \omega_0 t$.

25 $\omega_0 = 1000$ rad/s, dus resonantie treedt op bij een spanning met $\omega = 1000$ rad/s.
Dit is spanning b.

26 **a** $Q_0 = \dfrac{|U_L|}{|U_{bron}|}$. Volgens het principe van spanningsdeling geldt: $\dfrac{|U_L|}{|U_{bron}|} = \dfrac{U_L}{U_R} = \dfrac{Z_L}{Z_R}$.

b $Q_0 = \dfrac{U_L}{U_R} = \dfrac{Z_L}{Z_R} = \dfrac{\omega_0 L}{R}$.

Eerder zagen we: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$. Invullen in bovenstaande betrekking levert:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot L}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L^2}{LC}}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

27 $\omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{2} \cdot B = \omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{2} \cdot \dfrac{\omega_0}{Q} = \omega_0 \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{Q}) = \omega_0 \cdot (1 - \dfrac{1}{2Q})$

Op dezelfde manier is de formule voor ω_2 af te leiden.

28 **a** $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} = \sqrt{\dfrac{1}{0{,}02 \cdot 0{,}000001}} = 7071$ rad/s

b $Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R} = \dfrac{7071 \cdot 0{,}02}{2{,}0} = 71$

c $B = \dfrac{R}{L} = \dfrac{2}{0{,}02} = 100$ rad/s

d $\omega_1 = 7071 - 0{,}5 \cdot 100 = 7021$ rad/s ; $\omega_2 = 7071 + 50 = 7121$ rad/s

29 **a** $B = 8050 - 7950 = 100 = \frac{R}{L} = \frac{8}{L}$. Hieruit volgt: $L = \frac{8}{100} = \underline{0{,}08\ \text{H}}$.

$\omega_0 = 8000$ rad/s (midden tussen 7950 en 8050) $= \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}08C}}$

Hieruit volgt: $8000^2 = \frac{1}{0{,}08C}$, dus $C = \frac{1}{8000^2 \cdot 0{,}08} = \underline{1{,}95 \cdot 10^{-7}\ \text{F}}$

b De aanname dat de resonantiepiek symmetrisch is, geldt alleen bij relatief hoge kwaliteiten (bijvoorbeeld > 20).

$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{8000 \cdot 0{,}08}{8} = 80$. Deze aanname is dus zeker gerechtvaardigd.

30 **a** $B = 21000 - 20000 = 1000$ Hz $= 6283$ rad/s. Hieruit volgt: $B = \frac{R}{L} = 6283$

b $\omega_0 = 20500 \cdot 2\pi = 128805$ rad/s

c $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, dus $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Invullen levert: $128805^2 = \frac{1}{LC}$

Hieruit volgt: $C = \frac{1}{1{,}659 \cdot 10^{10} L}$

d Uit a: $R = 6283 \cdot 1 = 6283\ \Omega$.

Uit c: $C = \frac{1}{1{,}659 \cdot 10^{10} \cdot 1} = 6{,}03 \cdot 10^{-11}$ F

e Uit a: $R = 6283L$, dus $L = \frac{1}{6283R} = \frac{1}{6283 \cdot 1} = 1{,}59 \cdot 10^{-4}$ H.

Uit c: $C = \frac{1}{1{,}659 \cdot 10^{10} \cdot L} = \frac{1}{1{,}659 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}59 \cdot 10^{-4}} = 3{,}79 \cdot 10^{-7}$ F

f $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{R/L} = \frac{128805}{6283} = 20{,}5$

31 **a** We gaan uit van een *RCL*-serieschakeling met $R = 2{,}0\ \Omega$.

Uit $B = 50$ Hz $= 2\pi \cdot 50 = 100\pi$ rad/s volgt: $\frac{R}{L} = 3143$.

Hieruit volgt $L = \frac{R}{3143} = \frac{2}{3143} = 6{,}36 \cdot 10^{-4}$ H

Uit $\omega_0 = 5825 \cdot 2\pi = 36600$ volgt: $36600^2 = \frac{1}{LC}$ (zie opgave 28c)

Hieruit volgt: $C = \frac{7{,}465 \cdot 10^{-10}}{L} = \frac{7{,}465 \cdot 10^{-10}}{6{,}36 \cdot 10^{-4}} = 1{,}17 \cdot 10^{-6}$ F.

b $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{R/L} = \frac{36600}{3143} = 11{,}6$

c Bij lage frequenties ligt de resonantiefrequentie dichter bij het linker kantelpunt dan bij het rechter kantelpunt. ω_0 is in werkelijkheid dus kleiner dan de ω_0 die wij gebruikt hebben. Omgekeerd zullen de kantelpunten die bij "onze" ω_0 horen dus in werkelijkheid wat meer naar rechts liggen. Ons filter laat dus eigenlijk iets te hoge frequenties door.